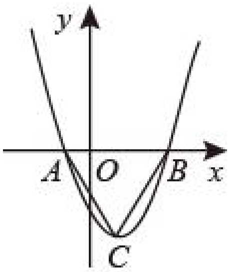
2023年中考数学二轮专项练习：二次函数压轴题（特殊三角形问题）

1．已知二次函数 $y=mx^2-2mx-3m(m>0)$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），顶点为 C．



（1）用含 m 的代数式表示顶点 C 的坐标为________．

（2）求 A，B 两点的坐标．

（3）连接 BC， AC，若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，求 m 的值．

2．抛物线 $y=ax^2+\frac{11}{4}x-6$ 与 x 轴交于 $A(t,0)$， $B(8,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C，直线 $y=kx-6$ 经过点 B．点 P 在抛物线上，设点 P 的横坐标为 m．

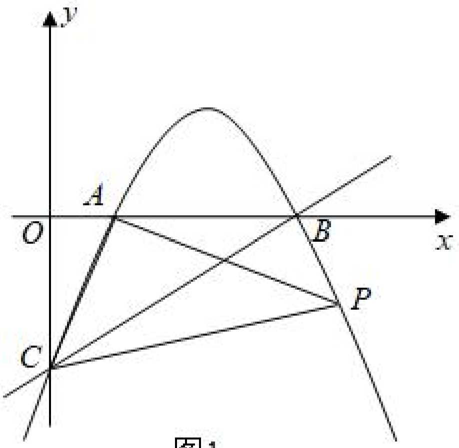


图1

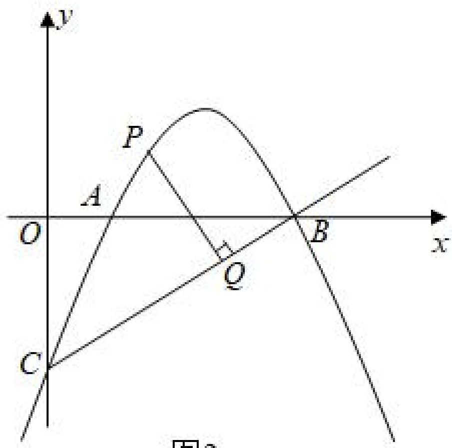


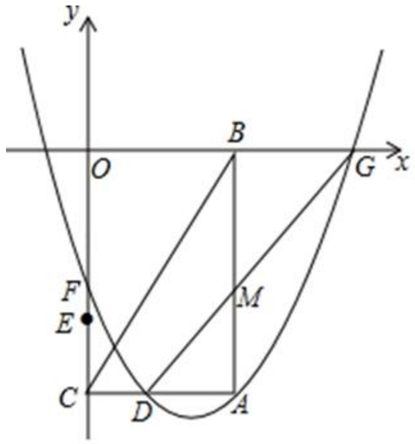
图2

(1)求抛物线的表达式和 t，k 的值；

(2)如图 1，连接 AC，AP，PC，若△APC 是以 CP 为斜边的直角三角形，求点 P 的坐标；

(3)如图 2，若点 P 在直线 BC 上方的抛物线上，过点 P 作 $PQ\perp BC$，垂足为 Q，求 $CQ+\frac{1}{2}PQ$ 的最大值．

3．如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为（6，$-6\sqrt{3}$），$AB\perp x$ 轴于点 B，$AC\perp y$ 轴于点 C，连接 BC．点 D 是线段 AC 的中点，点 E 的坐标为（0，$-4\sqrt{3}$），点 F 是线段 EO 上的一个动点．过点 A，D，F 的抛物线与 x 轴正半轴交于点 G，连接 DG 交线段 AB 于点 M．

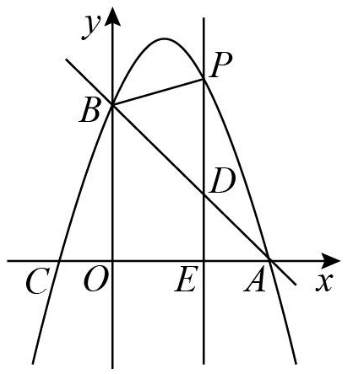


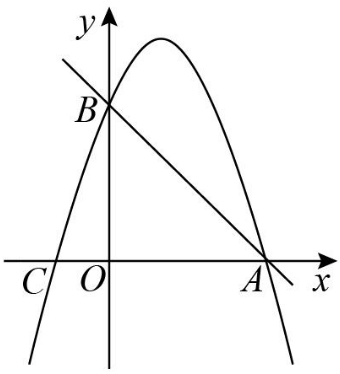
(1)求$\angle ACB$的度数；

(2)当点F运动到原点时，求过A，D，F三点的抛物线的函数表达式及点G的坐标；

(3)以线段DM为一边作等边三角形DMP，点P与点A在直线DG同侧，当点F从点E运动到点O时，请直接写出点P运动的路径的长．

4．如图，直线$y=-x+n$与x轴交于点A（3，0），与y轴交于点B，抛物线$y=-x^2+bx+c$经过A，B．





备用图

(1)求抛物线解析式；

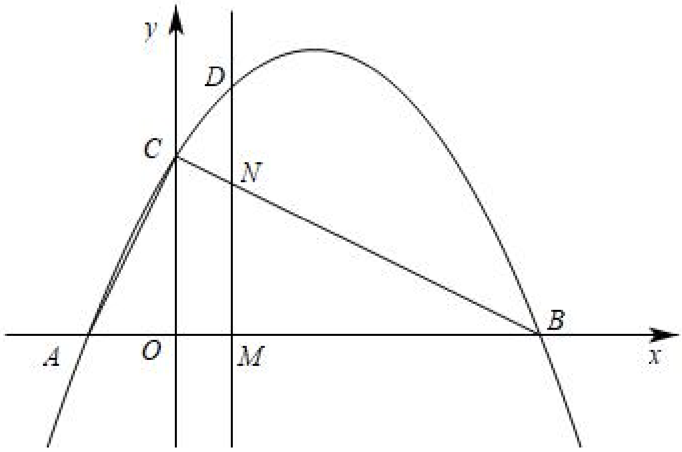
(2)E（m，0）是线段OA上一动点，过点E作$ED\perp x$轴于点E，交AB于点D，交抛物线于点P，连接PB．

①点E在线段OA上运动时，若△PBD是直角三角形，点P的坐标为_；（直接写出）

②点E在线段OA上运动时，连结PC交AB于点Q，当$\frac{PQ}{CQ}$的值最大时，请你求出点E的坐标和$\frac{PQ}{CQ}$的最大值．

(3)若点H是抛物线的顶点，在x轴上有一点M，平面内是否存在点N，使得以A、H、M、N为顶点的四边形是菱形？若存在，直接写出点N的坐标；若不存在，说明理由

5．二次函数$y=ax^2+bx+2$的图象交x轴于点$A(-1，0)$，$B(4，0)$两点，交y轴于点C．动点M从点A出发，以每秒2个单位长度的速度沿AB方向运动，过点M作$MN\perp x$轴交直线BC于点N，交抛物线于点D，连接AC，设运动的时间为t秒．



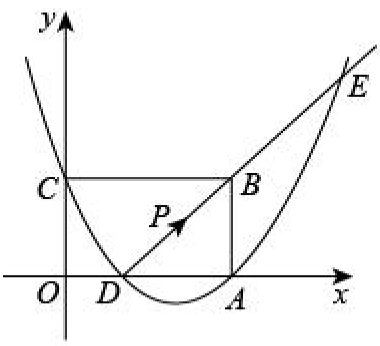
(1)求二次函数 $y=ax^2+bx+2$ 的表达式；

(2)连接 BD，当 $t=\dfrac{3}{2}$时，求△DNB 的面积；

(3)在直线 MN 上存在一点 P，当△PBC 是以∠BPC 为直角的等腰直角三角形时，求此时点 D 的坐标；

(4)当 $t=\dfrac{5}{4}$时，在直线 MN 上存在一点 Q，使得∠AQC+∠OAC＝90°，求点 Q 的坐标.

6．如图，已知矩形$OABC$，点A，C分别在x，y轴上，抛物线$y=ax^2+bx+c$经过$A(12,0)$，$D(6,0)$两点，且与y轴交于点$C(0,8)$．动点P从点D出发，以每秒 1 个单位的速度沿射线DB方向运动，设P运动的时间为t（秒），射线DB交抛物线于E．

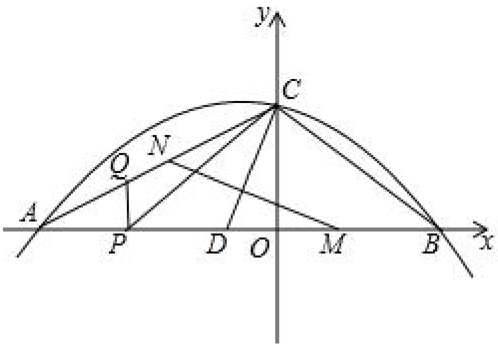


(1)求抛物线的解析式；

(2)连接AP，是否存在这样的时刻t，使得$\angle PAB=\angle ADB$？若存在请求出t的值；若不存在，请说明理由.

(3)连接CP和AE，若$\angle PCB<\angle AED$，求t的取值范围.

7．如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴的交点分别为$A\left(-6,0\right)$和点$B\left(4,0\right)$，与y轴的交点为$C\left(0,3\right)$．



（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 是线段 OA 上一动点（不与点 A 重合），过 P 作平行于 y 轴的直线与 AC 交于点 Q，点 D、M 在线段 AB 上，点 N 在线段 AC 上．

①是否同时存在点 D 和点 P，使得 ΔAPQ 和 ΔCDO 全等，若存在，求点 D 的坐标，若不存在，请说明理由；

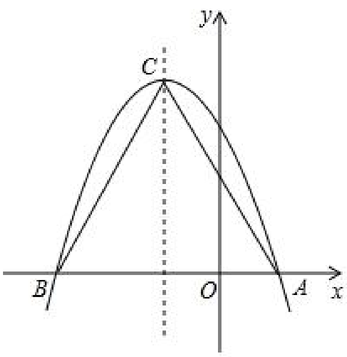
②若 $\angle DCB=\angle CDB$，CD 是 MN 的垂直平分线，求点 M 的坐标．

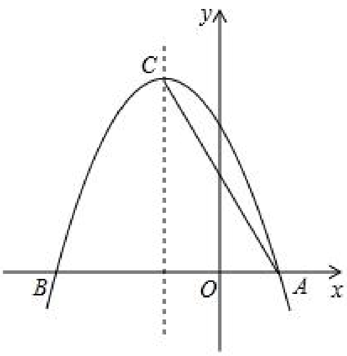
8．如图，抛物线 $y=mx^2+4mx-12m$（$m<0$）与 x 轴相交于点 A、B（点 A 在点 B 的右边），顶点为 C．

（1）求 A、B 两点的坐标；

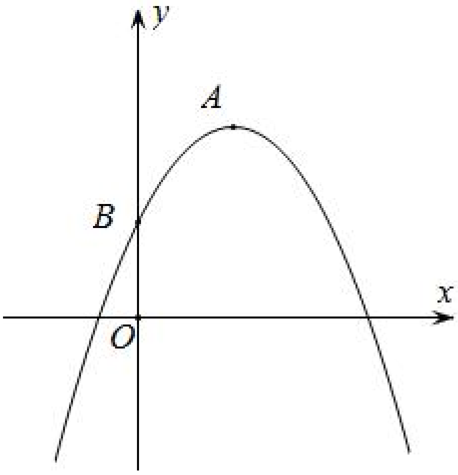
（2）若△ABC 为等边三角形，点 M（x_0，y_0）为抛物线 $y=mx^2+4mx-12m$（$m<0$）上任意一点，总有 $n-\frac{85}{6}\geq\frac{16\sqrt{3}}{3}my_0^2+40\sqrt{3}y_0-298$ 成立，求 n 的最小值；

（3）若 $m=-\frac{1}{2}$，点 P 为 x 轴上一动点，若 $\alpha=\angle CAB+\angle CPB$，当 $\tan\alpha=4$ 时，求 P 点的坐标．





9．如图，抛物线 $C_1: y=-\frac{1}{2}x^2+2x+2$ 的顶点为 A，且与 y 轴交于点 B，将抛物线 C_1 沿 $y=a$ 对称后，得到抛物线 C_2 与 y 轴交于点 C．



(1) 求 A、B 两点坐标；

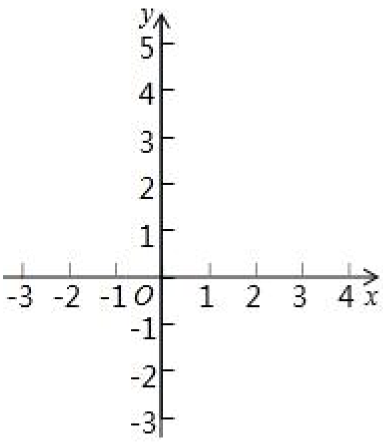
(2) 若抛物线 C_2 上存在点 D，使得 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，求出此时抛物线 C_2 的表达式．

10．如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 经过点 A（﹣3，0）和点 B（3，2），与 y 轴相交于点 C．

（1）求这条抛物线的表达式；

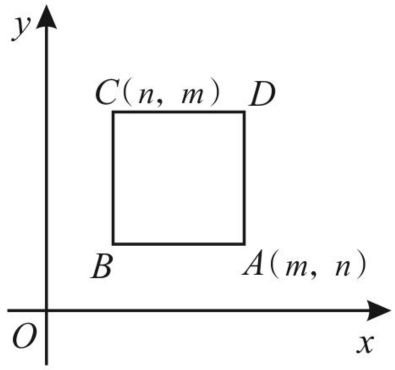
（2）点 P 是抛物线在第一象限内一点，联结 AP，如果点 C 关于直线 AP 的对称点 D 恰好落在 x 轴上，求直线 AP 的截距；

（3）在（2）小题的条件下，如果点 E 是 y 轴正半轴上一点，点 F 是直线 AP 上一点．当△EAO 与△EAF 全等时，求点 E 的纵坐标．



11．在平面直角坐标系中，若四边形同时满足：

①四边都与坐标轴平行；②其中一对对角的顶点坐标互反．比如：A（m，n），则 C（n，m）．（$m\neq n$）如图．若一个函数的图像恰好经过这样的四边形的一对对角的顶点，我们称这个函数是在（m，n）上的“NY 函数”．



(1)下列哪些函数是在（1，3）上的“NY 函数”？（在括号里填写“是”或者“不是”）

① $y=-x+4$（　）

② $y=\frac{3}{x}$（　）

③ $y=x^2$（　）

(2)已知：反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 是在（-2，2）上的“NY 函数”，求 k 的值；

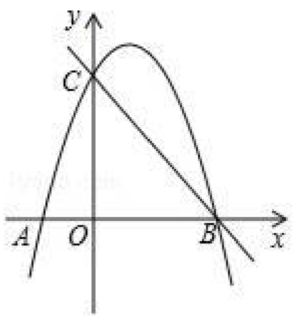
(3)若抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$，$a+b>0$）是在（1，3）上的“NY 函数”，且当 $1\le x\le 3$ 时的最小值为 $4a$．已知直线 $y=h$ 与抛物线相交于 P、Q 两点，抛物线与 y 轴相交于 H．若△PQH 的内心与外心刚好重合，试确定 h 的值．

12．如图，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B（A 左 B 右），与 y 轴交于 C，直线 $y=-x+5$ 经过点 B、C.

（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 为第二象限抛物线上一点，设点 P 横坐标为 m，点 P 到直线 BC 的距离为 d，求 d 与 m 的函数解析式；

（3）在（2）的条件下，若∠PCB+∠POB＝180°，求 d 的值．

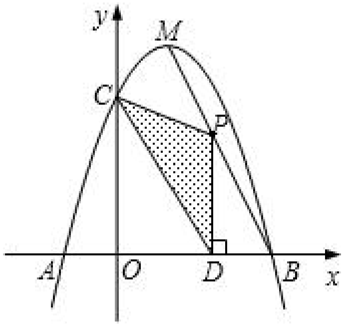


13．已知抛物线 l_1：$y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 M（1，－4）．它与 x 轴交于点 A、点 B 两点，其中点 B 的坐标为（3，0）．

（1）求抛物线的表达式；

（2）将抛物线 l 绕 x 轴上的一个动点旋转 180°得新抛物线 l'，点 B 和点 M 的对应点分别为点 C 和点 N，当△BMN 为直角三角形时，求新抛物线 l'的表达式．

14．如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴相交于 A、B 两点，与 y 轴相交于点 C，且点 B 与点 C 的坐标分别为 $B(3,0),C(0,3)$，点 M 是抛物线的顶点．



(1)求二次函数的关系式；

(2)点 P 为线段 MB 上一个动点，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D，若 $OD = m$，$\triangle PCD$ 的面积为S，求S与 m 的函数关系式，并求当S取得最大值时，点 P 的坐标；

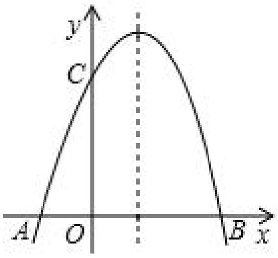
(3)在 MB 上是否存在点 P，使 $\triangle PCD$ 为直角三角形？如果存在，请直接写出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

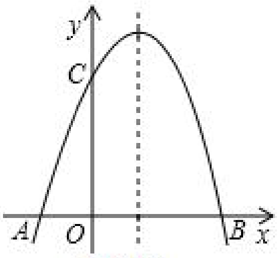
15．已知，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 A(-1，0)和 C(0，3).

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线的对称轴上，是否存在点 P，使 PA+PC 的值最小?如果存在，请求出点 P 的坐标，如果不存在，请说明理由；

（3）设点 M 在抛物线的对称轴上，当△MAC 是直角三角形时，求点 M 的坐标.





备用图

参考答案：

1．（1）$(1,-4m)$；（2）A 点坐标为$(-1,0)$，B 点坐标为$(3,0)$；（3）$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．(1)，$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x-6$，$t$=3，$k=\frac{3}{4}$

(2)点$P\left(10,-\frac{7}{2}\right)$

(3)$\frac{169}{16}$

3．(1)$\angle ACB=60°$; (2)$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-3\sqrt{3}x$; $G(9,0)$; (3)$\sqrt{3}$.

4．(1)$y=-x^2+2x+3$；

(2)①（1，4）或（2，3）；②（$\frac{3}{2}$，0），$\frac{9}{16}$

(3)（6，4）或（$1-2\sqrt{5}$，4）或（$1+2\sqrt{5}$，4）或（1，-4）

5．(1)$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$

(2)2

(3)D(1，3)或D(3，2)

(4)Q 点坐标分别为($\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{2}$)，($\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$)

6．(1)$y=\frac{1}{9}x^2-2x+8$

(2)存在，$t=3.6$

(3)$\frac{38}{5}<t<\frac{250}{19}$

7．（1）$y=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+3$；（2）①存在点$D$，使得$\Delta APQ$和$\Delta CDO$全等，$D\left(\frac{3}{2},0\right)$；②点$M\left(\frac{3}{2},0\right)$

8．（1）点 A、B 的坐标分别为（2，0）、（－6，0）；（2）n 的最小值为$\frac{25}{6}$；（3）点 P 的坐标为（34，0）.

9．（1）$A(2,4)$，$B(0,2)$；（2）$C_2:y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$、$C_2:y=\frac{1}{2}(x-2)^2-12$或$C_2:y=\frac{1}{2}(x-2)^2-4$

10．（1） $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$；（2） $\frac{3}{2}$；（3） $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ 或 $3\sqrt{5}-6$

11．(1)①是；②是；③不是

(2) ±4

(3) $\frac{51}{4}$

12．（1）$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+5$（2）$d=\frac{\sqrt{2}}{4}m^2-\frac{5\sqrt{2}}{4}m$（$-2<m<0$）（3）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13．（1）$y=x^2-2x-3$；（2）$y=-(x+15)^2+4$ 或 $y=-(x+5)^2+4$．

14．(1)$y=-x^2+2x+3$

(2)$S=-m^2+3m$，$P\left(\frac{3}{2},3\right)$

(3)存在，$P\left(\frac{3}{2},3\right)$ 或 $\left(3\sqrt{2}-3,12-6\sqrt{2}\right)$

15．（1） $y=-x^2+2x+3$；（2）存在，当 $PA+PC$ 的值最小时，点 P 的坐标为 $(1,2)$；（3）点 M 的坐标为 $(1,1)$、$(1,2)$、$(1,\frac{8}{3})$ 或 $(1,-\frac{2}{3})$