

2024—2025 学年第一学期十月质量抽测 高一数学

班级_____ 学号_____ 姓名_____

一、单选题

1. 若集合 $M = \{x | -1 < x < 1\}$, $N = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$
C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | -1 < x < 0\}$
2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 \leq 0$ ”的否定是 ()
- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 < 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^3 \leq 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^3 > 0$
3. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}, b > c$, 则下列不等式恒成立的是 ()
- A. $a^2 + b > a^2 + c$ B. $a + b^2 > a + c^2$
C. $ab^2 > ac^2$ D. $a^2b > a^2c$
4. 已知 $p: -3 < x \leq 1$ 是 q 的必要条件, 则 q 可以为 ()
- A. $-3 \leq x \leq 1$ B. $-3 \leq x < 1$
C. $-3 < x < 1$ D. $-2 < x < 2$
5. 已知实数 $x > 1$, 则函数 $y = 2x + \frac{2}{x-1}$ 的最小值为 ()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
6. 若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - m \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 m 的最大值为 ()
- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

7. 若关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集是 $\{x|x<-2\}$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-1}>0$ 的解集为 ()

- A. $\{x|-2<x<-1\}$
- B. $\{x|1<x<2\}$
- C. $\{x|x<-2\text{或}0<x<1\}$
- D. $\{x|x<1\text{或}x>2\}$

8. 设 $m, n \in \mathbf{R}$, 定义运算“ \triangle ”和“ ∇ ”如下: $m\triangle n = \begin{cases} m, m \leq n, \\ n, m > n, \end{cases}$ $m\nabla n = \begin{cases} n, m \leq n, \\ m, m > n. \end{cases}$

若正数 m, n, p, q 满足 $mn \geq 4, p+q \leq 4$, 则 ()

- A. $m\triangle n \geq 2, p\triangle q \leq 2$
- B. $m\nabla n \geq 2, p\nabla q \geq 2$
- C. $m\triangle n \geq 2, p\nabla q \geq 2$
- D. $m\nabla n \geq 2, p\triangle q \leq 2$

二、多选题

9. 已知 $x>0$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $x-1+\frac{1}{x-1} \geq 2$
- B. $x\sqrt{1-4x^2} \leq \frac{1}{4}$
- C. $\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{2}$
- D. $-\frac{x}{9}-\frac{4}{x} \leq -\frac{4}{3}$

10. 集合 $P_1 = \{x | x^2 + ax + 1 > 0\}$, $P_2 = \{x | x^2 + ax + 2 > 0\}$, 下列说法正确的是 ()

- A. 对任意 a , P_1 是 P_2 的子集 B. 对任意 a , P_1 不是 P_2 的子集
C. 存在 a , 使得 P_1 不是 P_2 的子集 D. 存在 a , 使得 P_2 是 P_1 的子集

11. 已知 $a > b > c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), 且 $3a + 2b + c = 0$, 则 ()

- A. $a + c < 0$ B. $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq -2$
C. 存在 a, c 使得 $c^2 - 36a^2 = 0$ D. $\frac{2a+b}{a+c} < -\frac{1}{2}$

三、填空题

12. 已知集合 M 中含有 2 个元素 $x+1, x^2-2x-3$, 写出一个满足的条件的 $x =$ _____.

13. 中国宋代数学家秦九韶曾提出“三斜求积术”, 即假设在平面内有一个边长分别为 a, b, c 的三角形, 其面积 S 可由公式 $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ 求得, 其中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 这个公式也被称为海伦-秦九韶公式, 现有一个三角形的三边长满足 $a+b=14, c=6$, 则此三角形面积的最大值为_____.

14. 若 $a > 1$ ，且不等式 $(x-a)\left(x-\frac{4}{a}\right) < 0$ 的解集中有且仅有一个整数，则 a 的取值范围是_____.

四、解答题

15. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$.

(1) 求 $A \cap B, A \cup B$;

(2) 求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B, (\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$.

16. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + a^2 = 0$ ，当命题 p 为真命题时，实数 a 的取值集合为 A .

(1) 求集合 A ;

(2) 设非空集合 $B = \{a | 3m - 2 \leq a \leq m - 1\}$ ，若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件，求实数 m 的取值范围.

17. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x + b < 0$.

(1) 若不等式的解集是 $\{x | 1 < x < 5\}$, 求 $a+b$ 的值;

(2) 若 $a > 0, b = 1$, 求此不等式的解集.

18. 近几年来, “盲盒文化”广为流行, 这种文化已经在中国落地生根, 并发展出具有中国特色的盲盒经济. 某盲盒生产及销售公司今年初用 98 万购进一批盲盒生产线, 每年可有 50 万的总收入, 已知生产此盲盒 x 年 (x 为正整数) 所用的各种费用总计为 $2x^2 + 10x$ 万元.

(1) 该公司第几年首次盈利 (总收入超过总支出, 今年为第一年)?

(2) 该公司几年后年平均利润最大, 最大是多少?

19. 已知 A 是 \mathbf{R} 的非空子集, 如果对任意 $x, y \in A$, 都有 $x + y \in A, xy \in A$, 则称 A 是封闭集.

(1) 判断集合 $B = \{0\}$, $C = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是否为封闭集, 无需说明理由;

(2) 判断以下两个命题的真假, 并说明理由;

命题 P : 若非空集合 A_1, A_2 是封闭集, 则 $A_1 \cup A_2$ 也是封闭集;

命题 q : 非空集合 A_1, A_2 是封闭集, 则 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ 是 $A_1 \cap A_2$ 为封闭集的充要条件;

(3) 若非空集合 A 是封闭集合, 设全集为 \mathbf{R} , 求证: A 的补集不是封闭集.