

省锡中 2024 级高一 10 月阶段性练习

数学

(满分 150 分, 时间 120 分钟)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 + 2x + 2 \leq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 + 2x + 2 > 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 + 2x + 2 \leq 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 + 2x + 2 > 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $x^2 + 2x + 2 \geq 0$

2. 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

3. “ x, y 都是有理数”是“ xy 是有理数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 不等式 $\frac{3}{x-2} \leq 4$ 的解集为 ()

- A. $\left\{x \mid 2 < x \leq \frac{11}{4}\right\}$ B. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x \geq \frac{11}{4}\}$ C. $\left\{x \mid 2 \leq x \leq \frac{11}{4}\right\}$ D. $\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq \frac{11}{4}\}$

5. 下列从集合 A 到集合 B 的对应关系, 其中 y 是 x 的函数的是 ()

- A. $A = B = \mathbf{Z}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = \frac{x}{2}$
B. $A = \{x \mid x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \mathbf{R}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = \pm x$
C. $A = B = \mathbf{R}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = x^2$
D. $A = B = \mathbf{R}$, 对应关系 $f: x \rightarrow y = \frac{2}{x}$

6. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(x| -2 < x < 7)$, 其中 a, b, c 为常数, 则不等式 $ax^2 + bx + a \leq 0$ 的解集是 ()

A. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{7}\right\}$

B. $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{7}, \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x \geq \frac{1}{7}\right\}$

D. $\left\{x \mid -\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{mx^2 + mx + 1}$ 的定义域是 \mathbb{R} , 则 m 的取值范围是 ()

A. $0 < m \leq 4$

B. $0 \leq m < 4$

C. $m \geq 4$

D. $0 \leq m \leq 4$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ x^2-ax+6, & x \geq 1 \end{cases}$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ 成

立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[2, +\infty)$

B. $\left(\frac{1}{3}, 2\right]$

C. $\left(\frac{1}{3}, 1\right]$

D. $[1, 2]$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 下列命题是真命题的为 ()

A. 若 $a > b > 0 > c > d$, 则 $ab > cd$

B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$

C. 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$

D. 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab < 0$

10. 下列各组函数是同一函数的是 ()

A. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(s) = s^2 - 2s - 1$

B. $f(x) = \sqrt{x}$ 与 $g(x) = x\sqrt{x}$

C. $f(x) = x$ 与 $g(\lambda) = x(x > 0)$

D. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x < 2 \\ 5-x, & x \geq 2 \end{cases}$, $f(a) = f(b) = f(c)$ ($a < b < c$), 则 ()

A. $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$

B. 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(5, +\infty)$

C. $0 < a < 1$ 且 $1 < b < 2$

D. $0 < f(c) < 1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 满足条件 $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 A 的个数为_____.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} f(f(x+5)), & x < 10 \\ 2x - 15, & x \geq 10 \end{cases}$, 则 $f(9)$ 的值为_____.

14. 已知正数 a, b 满足 $a + 2b = 1$, 则 $\frac{5}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (15 分) 已知 $f(2x+1) = 4x^2 + 6x + 4$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 试判断函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上的单调性，并用单调性的定义证明.

17. (15分) 科技创新是企业发展的源动力, 是一个企业能够实现健康持续发展的重要基础. 某科技企业最新研发了一款大型电子设备, 并投入生产应用. 经调研, 该企业生产此设备获得的月利润 $p(x)$ (单位: 万元) 与投入的月研发经费 x ($15 \leq x \leq 40$, 单位: 万元) 有关: 当投入的月研发经费不高于 36 万元时, $p(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x - 90$; 当投入月研发经费高于 36 万元时, $p(x) = 0.4x + 54$. 对于企业而言, 研发利润率 $y = \frac{p(x)}{x} \times 100\%$, 是优化企业管理的重要依据之一, y 越大, 研发利润率越高, 反之越小.

(1) 求该企业生产此设备的研发利润率 y 的最大值以及相应月研发经费 x 的值;

(2) 若该企业生产此设备的研发利润率不低于 190%, 求月研发经费 x 的取值范围.

18. (17分) 设函数 $f(x) = ax^2 + (1-a)x + a - 2$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 若 $a = -2$, 求 $f(x) < 0$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 解关于 x 的不等式: $f(x) < a - 1$.

19. (17分) 已知有限集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$), 如果 A 中的元素 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, 就称 A 为“完美集”.

(1) 判断: 集合 $\{-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}$ 是否为“完美集”? 并说明理由;

(2) a_1, a_2 是两个不同的正数, 且 $\{a_1, a_2\}$ 是“完美集”, 求证: a_1, a_2 至少有一个大于 2;

(3) 若 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为正整数, 求“完美集” A .