无锡市第一中学 2024-2025 学年度第一学期阶段性质量检测试卷

高 一 数 学　　2024.10

一．单选题（共 8 小题，每题 5 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2\le 1,x\in \mathrm{N}\right\}$，则集合 A 的子集个数为（　）

A．3　　B．4　　C．8　　D．16

2．“$\forall x\in\left(2,+\infty\right)$，$x^2-2x>0$”的否定是（　）

A．$\exists x\in\left(-\infty,2\right)$，$x^2-2x\le 0$　　B．$\forall x\in\left(2,+\infty\right)$，$x^2-2x\le 0$

C．$\exists x\in\left(2,+\infty\right)$，$x^2-2x\le 0$　　D．$\forall x\in\left(-\infty,2\right)$，$x^2-2x>0$

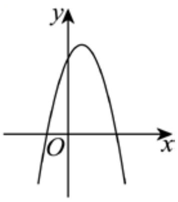
3．下列各式中，正确的个数是（　）

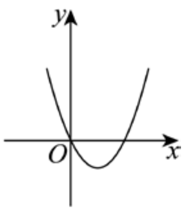
①$\{0\}\in\{0,1,2\}$；　②$\{0,1,2\}\subseteq\{2,1,0\}$；　③$\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$；

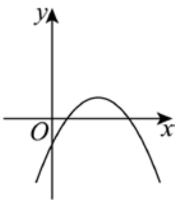
④$\varnothing=\{0\}$；　⑤$\{0,1\}=\{(0,1)\}$；　⑥$0\in\{0\}$.

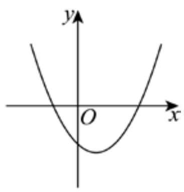
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$，则它的图象可能是（　）

A．

B．

C．

D．

5．下列选项中表示同一函数的是（　）

A．$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=1$　　B．$f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

C．$f\left(x\right)=\begin{cases}1,x\ge 0,\\-1,x<0\end{cases}$ 与 $g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|},x\ne 0,\\1,x=0\end{cases}$　　D．$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $g(x)=x-1$

6．已知 $A=\{y\mid y=x^2-2x+3\}$，$B=\{x\mid 2x-a>0\}$，若"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，则 a 的取值范围为（　）

A．$(4,+\infty)$　　B．$[4,+\infty)$　　C．$(-\infty,4)$　　D．$(-\infty,4]$

7．若 $x>0$， $y>0$ 且 $xy=x+4y+5$，则 xy 的最小值为（　　）

A．1　　B．5　　C．12　　D．25

8．一群学生参加学科夏令营，每名同学参加至少一个学科考试．已知有 80 名学生参加了数学考试，50 名学生参加了物理考试，45 名学生参加了化学考试，学生总数是只参加一门考试学生数的 2 倍，也是参加三门考试学生数的 4 倍，则学生总数为（　　）

A．100 名　　B．108 名　　C．120 名　　D．前三个答案都不对

二．多选题（共 3 小题，每题 6 分，错选得 0 分，少选得部分分）

9．下列命题为真命题的是（　　）

A．方程 $ax^2+x+a=0$ 有唯一解的充要条件是 $a=\pm\frac{1}{2}$

B．若 p 是 q 的必要不充分条件， p 是 r 的充要条件，则 q 是 r 的充分不必要条件

C．“ $f\left(x\right)=\sqrt{2mx^2+x+1}$ 的定义域是 R”的充要条件是“ $m\geq\frac{1}{8}$ ”

D．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{1-x},0\leq x\leq 1\\ \frac{1}{x+1},-1<x<0\end{cases}$ 的定义域是值域的真子集

10．已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，下列结论中正确的是（　　）

A．xy 的最大值是 $\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{2}xy+\frac{3}{4}y^2$ 的最大值是 1

C．$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值是 9　　D．x^2+4y^2 的最小值是 $\frac{1}{2}$

11．根据不等式的有关知识，下列日常生活中的说法正确的是（　　）

A．自来水管的横截面制成圆形而不是正方形，原因是：圆的面积大于与它具有相同周长的正方形的面积

B．用一架两臂不等长的天平秤黄金，先将 5 g 的砝码放在天平的左盘中，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将 5 g 的砝码放在天平右盘中，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡；最后将两次秤得的黄金交给顾客，则顾客购得的黄金大于 10g

C．某工厂第一年的产量为 A，第二年的增长率为 a，第三年的增长率为 b，则这两年的平均增长率等于 $\frac{a+b}{2}$

D．两次购买同一种物品，可以用两种不同的策略.第一种是不论物品价格升降，每次购买这种物品的数量都是一定的；第二种是不论物品价格升降，每次购买这种物品所花的钱数都是一定的．若两次购买时价格不同，则用第二种方式购买更实惠

三．填空题（共 3 小题，每题 5 分，共 15 分）

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的单调减区间为________________.

13. 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0)=3$，若 $f(x+1)-f(x)=2x+3$，则 $f(x)$ 的解析式为__________.

14. 已知 $A=\left\{x\in\mathrm{R}\middle|x^2-ax+a^2-3=0\right\}$，且满足 $A\subseteq\left\{x\middle|x>0\right\}$，则 a 的取值范围是_____.

四．解答题（共 5 题，共 77 分）

15.(13 分)已知函数 $f(x)=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域为集合 A，

集合 $B=\{x\,|\,m-2\le x\le 2m-1\}$.

(1)若 $m=3$，求 $A\cup B$；

(2)若 $A\cap B=B$，求 m 的取值范围.

16．(15 分)解答下列各题.

(1)若 $x>3$，求 $2x+\dfrac{1}{x-3}$ 的最小值；

(2)若正数 x,y 满足 $9x+y=xy$，

①求 xy 的最小值；

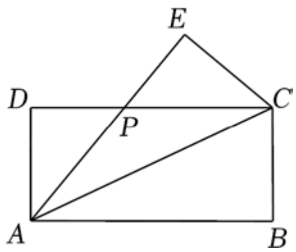
②求 $3x+y$ 的最小值.

17．(15 分)已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{6}{x}-3$，若 $xf(x)<4$ 的解集为 $\left\{x\middle|1<x<b\right\}$.

(1)求出 a、b 的值，并求不等式 $f(x)-x\le 0$ 的解集；

(2)解关于 x 的不等式 $cx^2-(ac+b)x+ab<0$.

18. (17 分) 如图设矩形 $ABCD$（$AB>AD$）的周长为 20cm，把△ABC 沿 AC 向△ADC 翻折成为△AEC，AE 交 DC 于点 P．设 $AB=x$cm．



(1)若 $DP>\frac{1}{4}AB$，求 x 的取值范围；

(2)设△ADP 面积为 S，求 S 的最大值及相应的 x 的值．

19．(17 分)已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2+a}{x+1}$．

(1)若 $a=0$，判断 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义法证明；

(2)若存在 $x\in[0,4]$，使得 $(x+1)f\left(x\right)+ax\geq 0$ 成立，求实数 a 的取值范围；

(3)若对任意的 $x\in\left[1,4\right]$，任意的 $a\in\left[-1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)-\left(\lambda-3\right)x+\lambda\geq 0$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围．

无锡市第一中学 2024-2025 学年度第一学期阶段性质量检测试卷

高 一 数 学 答案

1.B　2.C　3.C　4.D　5.C　6.B　7.D　8.A

9.BC　10.ACD　11.ABD

8．A

【分析】根据容斥原理可求 m 的值.

【详解】设只参加了数学、物理、化学考试的学生数分别为 x， y， z；

参加了两门学科考试的同学中参加了数学和物理、物理和化学、化学和数学的学生数分别为 c， a， b；

同时参加了三门学科考试的学生数为 m，如图.

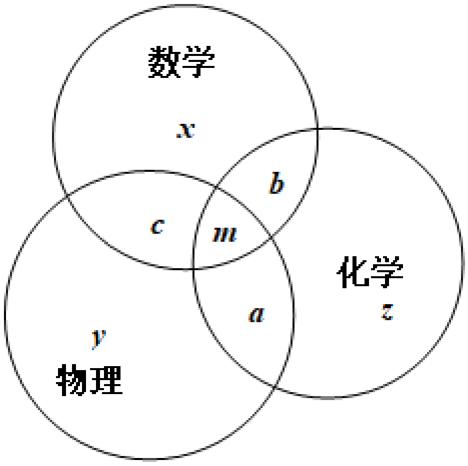
根据题意，有 $\begin{cases} x+b+c+m=80 \\ y+c+a+=m=50 \\ z+a+b+m=45 \\ x+y+z+a+b+c+m=2(x+y+z)=4m \end{cases}$，

前面三个等式相加，可得 $x+y+z+2(a+b+c)+3m=175$.

由第四个等式可得 $x+y+z=2m$， $a+b+c=m$，

因此 $2m+2m+3m=175$，

解得 $m=25$．因此学生总数为 $4m=100$.



故选：A

9．BC

【分析】根据充分条件和必要条件的定义依次判断各选项即可.

【详解】对于 A，当$a=0$时，方程$ax^2+x+a=0$可化为$x=0$，也满足唯一解的条件，故 A 错误；

对于 B，若p是q的必要不充分条件，则$q\Rightarrow p$，$p\nRightarrow q$；

若p是r充要条件，则$p\Rightarrow r$，$r\Rightarrow p$；

则有$q\Rightarrow r$，$r\nRightarrow q$，即q是r的充分不必要条件，故 B 正确；

对于 C，$2mx^2+x+1\geq 0$对一切实数恒成立，m=0 不成立，$m\neq 0$时$\begin{cases}2m>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$，则$m\geq\frac{1}{8}$；

对于 D，依题意$f\left(x\right)$的定义域为$(-1,1]$，值域为$[0,+\infty)$，不成立

故选：BC.

10．ACD

【详解】对 A，因为$x+2y=1\geq 2\sqrt{2xy}$，$xy\leq\frac{1}{8}$

当且仅当$x=2y=\frac{1}{2}$时等号成立；故 A 正确；

对 B，因为$x=1-2y>0$，所以$0<y<\frac{1}{2}$，则$\frac{3}{2}xy+\frac{3}{4}y^2=-\frac{9}{4}y^2+\frac{3}{2}y$，当$y=\frac{1}{3}$时

$y_{\max}=\frac{1}{4}$，故 B 错误；

对 C，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})(x+2y)=5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}\geq 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\frac{2y}{x}}=9$，当且仅当$\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$，

即$x=y=\frac{1}{3}$时取“=”，故 C 正确

对 D，$x^2+4y^2=\left(x+2y\right)^2-4xy=1-4xy$，由 A 知$(xy)_{\max}=\frac{1}{8}$，所以

$(x^2+4y^2)_{\min}=1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

故 D 正确.

故选：ACD.

11．ABD

【分析】根据题意利用不等式的性质以及作差法、基本不等式逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：设周长为$l>0$，则圆的面积为$S_{圆}=\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2=\frac{l^2}{4\pi}$，

正方形的面积为$S_{正方形}=\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{l^2}{16}$，因为$\frac{1}{4\pi}>\frac{1}{16}$，$l^2>0$，可得$\frac{l^2}{4\pi}>\frac{l^2}{16}$，即$S_{圆}>S_{正方形}$，

故 A 正确；

对于选项 B：设左右臂长 L1，L2 则$\begin{cases}5L_1=aL_2\\bL_1=5L_2\end{cases},\frac{5}{b}=\frac{a}{5}$，所以$ab=25$，顾客购得的黄金

$a+b>2\sqrt{ab}=10$，故 B 正确；

对于选项 C：设这两年的平均增长率为x，

则$A(1+a)(1+b)=A(1+x)^2$，可得$x=\sqrt{(1+a)(1+b)}-1$，

因为$x+1=\sqrt{(1+a)(1+b)}\leq\frac{(1+a)(1+b)}{2}=\frac{a+b}{2}+1$，即$x\leqslant\frac{a+b}{2}$，

当且仅当$1+a=1+b$，即$a=b$时，等号成立，即这两年的平均增长率不大于$\frac{a+b}{2}$，故 C

错误；

对于选项D：按第一种策略购物，设第一次购物时的价格为p_1元/kg，购n kg，

第二次购物时的价格为p_2元/kg，购n kg，两次购物的平均价格为$\frac{p_1n+p_2n}{2n}=\frac{p_1+p_2}{2}$；

若按第二种策略购物，第一次花m元钱，能购$\frac{m}{p_1}$ kg物品，

第二次仍花m元钱，能购$\frac{m}{p_2}$kg物品，两次购物的平均价格为$\frac{2m}{\frac{m}{p_1}+\frac{m}{p_2}}=\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$.

比较两次购的平均价格：

$$\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}=\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}=\frac{\left(p_1+p_2\right)^2-4p_1p_2}{2\left(p_1+p_2\right)}=\frac{\left(p_1-p_2\right)^2}{2\left(p_1+p_2\right)}\geqslant 0,$$

当且仅当$p_1=p_2$时，等号成立，所以两次价格不同时，第一种策略的平均价格高于第二种策略的平均价格，因而用第二种策略比较经济，故D正确.

故选：ABD.

12. $(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$

13. $f(x)=x^2+2x+3$

14. $(-\infty,-2)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

【详解】当$A=\varnothing$，$\Delta<0$，所以$a<-2或a>2$

当$A\neq\varnothing$，则$x^2-ax+a^2-3=0$有正跟，$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ a>0\\ a^2-3>0\end{cases}$，所以$\sqrt{3}<a\leq 2$

综上，a的取值范围为$(-\infty,-2)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

15. (1) $A\cup B=\left[-2,5\right]$

(2) $\left(-\infty-1\right)\cup\left[0,\frac{5}{2}\right)$

【分析】（1）由函数定义求出定义域得集合A，然后由并集定义计算；

（2）由 $A\cap B=B$ 得 $B\subseteq A$，然后根据 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 分类讨论.

【详解】（1）由题意得：$\begin{cases}2+x\geq 0\\16-x^2>0\end{cases}$，解得 $-2\leq x<4$，所以 $A=\left[-2,4\right)$.

若 $m=3$，则 $B=\left\{x\,|\,1\leq x\leq 5\right\}=\left[1,5\right]$，所以 $A\cup B=\left[-2,5\right]$.

（2）因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$

当 $B=\varnothing$ 时，满足 $B\subseteq A$，则 $2m-1<m-2$，解得 $m<-1$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}m-2\leq 2m-1\\m-2\geq -2?\\2m-1<4?\end{cases}$，解得 $0\leq m<\frac{5}{2}$.

综上，m 的取值范围为 $\left(-\infty-1\right)\cup\left[0,\frac{5}{2}\right)$.

16.（1）$\because x>3$，$\therefore x-3>0$，

$$2x+\frac{1}{x-3}=2(x-3)+\frac{1}{x-3}+6\geq 2\sqrt{2(x-3)\frac{1}{x-3}}+6=2\sqrt{2}+6$$

当且仅当 $2(x-3)=\frac{1}{x-3}$，即 $x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$(2x+\frac{1}{x-3})_{\min}=2\sqrt{2}+6$

（2）$\because 9x+y=xy,\therefore \frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$

①$\because x>0,y>0,\therefore \frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\frac{9}{y}}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$.，所以 $xy\geq 36$，当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{9}{y}$，即

$\begin{cases}x=2\\y=18\end{cases}$ 时，

$$(xy)_{\min}=36$$

②$3x+y=(3x+y)(\frac{1}{x}+\frac{9}{y})=12+\frac{y}{x}+\frac{27x}{y}\geq 12+2\sqrt{\frac{y}{x}\frac{27x}{y}}=12+6\sqrt{3}$

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{27x}{y}$，即$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\\y=3\sqrt{3}+9\end{cases}$时，$(3x+y)_{\min}=12+6\sqrt{3}$

17. 由题$xf(x)=ax^2-3x+6<4$，$ax^2-3x+2<0$的解集为$\{x|1<x<b\}$

所以$\begin{cases}a>0\\\frac{3}{a}=1+b\\\frac{2}{a}=b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，所以$f(x)=x+\frac{6}{x}-3$

$f(x)-x=\frac{6}{x}-3=\frac{6-3x}{x}\leq 0$，解得$(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

（2）由题不等式为$cx^2-(c+2)x+2<0$

①$c=0$时，$x>1$；

②$c>0$时，$(cx-2)(x-1)<0$

1° $\frac{2}{c}=1$即$c=2$时，无解

2° $\frac{2}{c}>1$即$0<c<2$时，$1<x<\frac{2}{c}$

3° $\frac{2}{c}<1$即$c>2$时，$\frac{2}{c}<x<1$

③$c<0$时，$(cx-2)(x-1)<0$即$(x-\frac{2}{c})(x-1)>0$，由$\frac{2}{c}<1$，不等式的解为

$x<\frac{2}{c}$或$x>1$

综上：当$c=0$时，解集为$(1,+\infty)$；

当$0<c<2$时，解集为$(1,\frac{2}{c})$

当$c=2$时，解集为$\varnothing$

当$c>2$时，解集为$(\frac{2}{c},1)$

当$c<0$时，解集为$(-\infty,\frac{2}{c})\cup(1,+\infty)$

18. （1）由矩形周长为40cm，可知$AD=(10-x)\text{cm}$，设$DP=a\text{cm}$，则$PC=(x-a)\text{cm}$

$\because \triangle ADP\cong\triangle CEP$，$\therefore AP=PC=(x-a)\text{cm}$.

在Rt$\triangle ADP$中，$AD^2+DP^2=AP^2$，即$(10-x)^2+a^2=(x-a)^2$，

得$a=10-\frac{50}{x}$，

由题意，$10-\frac{50}{x}>\frac{1}{4}x$，即$x^2-40x+200<0$，

解得$20-10\sqrt{2}<x<20+10\sqrt{2}$，

由$AB>AD$得，$5<x<10$，$\therefore 20-10\sqrt{2}<x<10$，

即x的取值范围是$\left(20-10\sqrt{2},10\right)$.

（2）因为$S=\frac{1}{2}AD\cdot DP=\frac{1}{2}(10-x)\left(10-\frac{50}{x}\right)$，$10<x<20$.

化简得$S=75-5\left(x+\frac{50}{x}\right)$.

$\because x>0$，$\therefore x+\frac{50}{x}\geq 10\sqrt{2}$，

当且仅当$x=\frac{50}{x}$，即$x=5\sqrt{2}$时，$(x+\frac{50}{x})_{\min}=10\sqrt{2}$，$S_{\max}=75-50\sqrt{2}\text{cm}^2$

19.

（1）a=0时，$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. 任取x_1,x_2，且$x_2>x_1\geq 0$

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\frac{{x_2}^2}{x_2+1}-\frac{{x_1}^2}{x_1+1}=\frac{{x_2}^2(x_1+1)-{x_1}^2(x_2+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+x_1+x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}$$

因为 $x_2>x_1\geq 0$，所以 $\begin{cases} x_2-x_1>0 \\ x_1x_2+x_1+x_2>0 \\ x_2+1>0 \\ x_1+1>0 \end{cases}$，$\therefore f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$ 即 $\therefore f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$

由定义可知 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增；

（2）由题 $x^2+a+ax\geq 0$，$\because x\in[0,4],\therefore a\geq -\frac{x^2}{x+1}$

由（1）$y=\frac{x^2}{x+1}$ 在 $[0,4]$ 单调递增，所以 x=4 时 $(\frac{x^2}{x+1})_{\max}=\frac{16}{5}$，所以 $\therefore a\geq -\frac{16}{5}$

（3）看作 a 的函数 $y=\frac{1}{x+1}a+\frac{x^2}{x+1}-\left(\lambda-3\right)x+\lambda$

$\because x\in\left[1,4\right],\therefore \frac{1}{x+1}>0$，当 a=-1 时，

$$y_{\min}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x^2}{x+1}-\left(\lambda-3\right)x+\lambda=x-1-\left(\lambda-3\right)x+\lambda\geq 0$$

$\therefore x(4-\lambda)+\lambda-1\geq 0$ 对任意的 $x\in\left[1,4\right]$ 恒成立

$\therefore \begin{cases} (4-\lambda)+\lambda-1\geq 0 \\ 4(4-\lambda)+\lambda-1\geq 0 \end{cases}$ 解得 $\lambda\leq 5$