# 天一高二上第一次检测数学试卷

**一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．**

1．（5 分）已知集合 $A=\{x\,|-2<x<5\}$，$B=\{x\,|\,1-2x>3\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$(-2,-1)$　　B．$(-2,1)$　　C．$(1,5)$　　D．$(-1,5)$

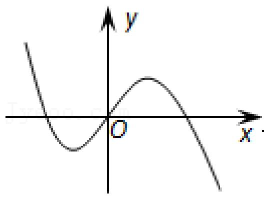
2．（5 分）不等式 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 的解集为 $($　　$)$

A．$\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $\leqslant -1\}$　B．$\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　C．$\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $x<-1\}$　D．$\{x\,|-1\leqslant x<1\}$

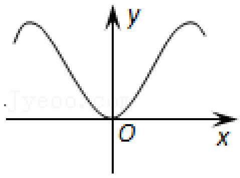
3．（5 分）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上为单调函数，则满足 $f(x)=f(\dfrac{x+2}{x+3})$ 的所有实数 $x$ 的和为 $($　　$)$

A．$-6$　　B．6　　C．8　　D．$-8$

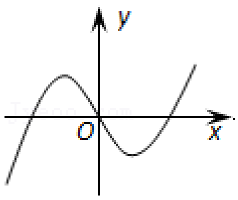
4．（5 分）已知函数 $f(x)=2x\cos x$，则函数 $f(x)$ 的部分图象可以为 $($　　$)$



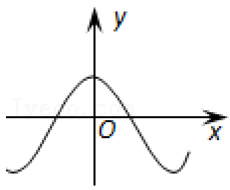

A．




B．

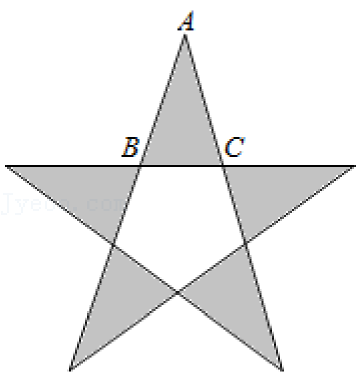



C．




D．

5．（5 分）等腰三角形的底与腰之比是黄金分割比的三角形称为黄金三角形，它是一个顶角为 $36^{\circ}$ 的等腰三角形．如图五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，其中一个黄金 $\Delta ABC$ 中，$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．由上面可得 $\sin 126^{\circ}=($　　$)$



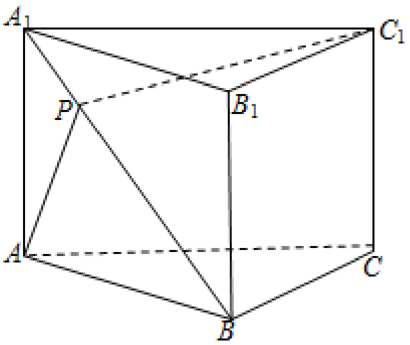

A．$\dfrac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B．$\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C．$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D．$\dfrac{4+\sqrt{5}}{8}$

6．（5 分）设$\Delta ABC$的三边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{b}{a+c}$，则$\Delta ABC$是(　　)

A．等腰三角形　　　　B．直角三角形

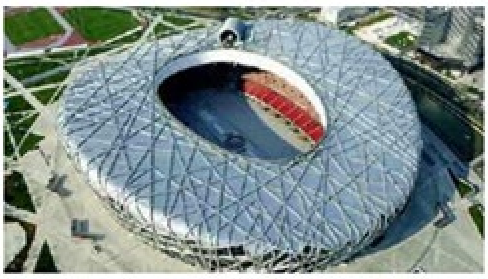
C．等腰三角形或直角三角形　　　　D．等腰直角三角形

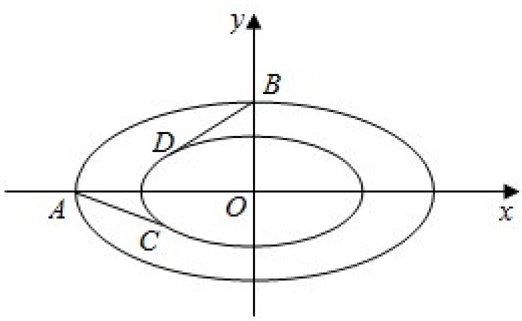
7．（5 分）如图所示，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中．$AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{3}$，$P$是$A_1B$上的一动点，则$AP+PC_1$的最小值为(　　)




A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{7}$　　C．$1+\sqrt{3}$　　D．3

8．（5 分）第 24 届冬季奥林匹克运动会，将在 2022 年 02 月 04 日在中华人民共和国北京市和张家口市联合举行．这是中国历史上第一次举办冬季奥运会，北京成为奥运史上第一个举办夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会的城市．同时中国也成为第一个实现奥运“全满贯”（先后举办奥运会、残奥会、青奥会、冬奥会、冬残奥会）国家．根据规划，国家体育场（鸟巢）成为北京冬奥会开、闭幕式的场馆．国家体育场“鸟巢”的钢结构鸟瞰图如图所示，内外两圈的钢骨架是离心率相同的椭圆，若由外层椭圆长轴一端点$A$和短轴一端点$B$分别向内层椭圆引切线$AC$，$BD$（如图），且两切线斜率之积等于$-\dfrac{9}{16}$，则椭圆的离心率为(　　)






A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　C．$\dfrac{9}{16}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全**

**部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9.（5 分）在空间四点$O$，$A$，$B$，$C$中，若$\{\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}\}$是空间的一个基底，则下列说法正确的是(　　)

A．$O$，$A$，$B$，$C$四点不共线

B．$O$，$A$，$B$，$C$四点共面，但不共线

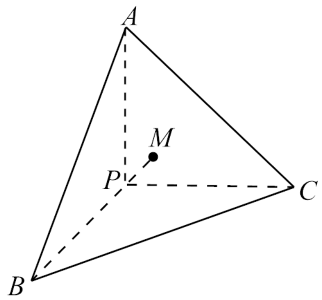
C．$O$，$A$，$B$，$C$四点不共面

D．$O$，$A$，$B$，$C$四点中任意三点不共线

10.（5 分）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个顶点分别为$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$P$，$Q$的坐标分别为$(0,b)$，$(0,-b)$，且四边形$A_1PA_2Q$的面积为$2\sqrt{2}$，四边形$A_1PA_2Q$的内切圆的周长为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，则双曲线$C$的方程为(　　)

A．$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$　　B．$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

11.（5 分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp PB$，$PB\perp PC$，$PA\perp PC$，点$M$是$\Delta ABC$内的一点，若$PM$与平面$PAB$，$PAC$，$PBC$所成的角分别是$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\Delta PAB$，$\Delta PAC$，$\Delta PBC$，$\Delta ABC$的面积分别为$S_{\Delta PAB}$，$S_{\Delta PAC}$，$S_{\Delta PBC}$，$S_{\Delta ABC}$，则以下说法正确的是(　　)




A．$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

B．$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

C．$S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}>S_{\Delta ABC}$

D．$\Delta ABC$是锐角三角形

12.（5 分）设$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$为单位向量，满足$|2\vec{e}_1-\vec{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，$\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$，$\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos^2\theta$的可能取值为(　　)

A．$\frac{19}{20}$　　B．$\frac{20}{29}$　　C．$\frac{28}{29}$　　D．1

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分**

13．（5 分）一只袋子中装有 7 个红玻璃球，3 个绿玻璃球，从中无放回地任意抽取两次，每次只取一个，取得两个红球的概率为$\frac{7}{15}$，取得两个绿球的概率为$\frac{1}{15}$，则至少取得一个红球的概率为 ____.

14．（5 分）若复数 $z$ 满足 $|z-3+2i|=1$，则 $|z-6-2i|$ 的最小值为 ____.

15．（5 分）已知一组数据 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 $s^2$. 若 $3x_1+1$，$3x_2+1$，$3x_3+1$，…，$3x_n+1$ 的平均数比方差大 4，则 $s^2-\overline{x}^2$ 的最大值为 ____.

16．（5 分）在 $\Delta ABC$ 中，$a$，$b$，$c$ 分别为内角 $A$，$B$，$C$ 的对边，$O$ 为 $\Delta ABC$ 的外心，且有 $AB+BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}AC$，$\sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos C\sin A=0$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$x$，$y\in R$，则 $x-2y=$____.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**

17．（10 分）已知圆 $C$ 的方程：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$.

（Ⅰ）求 $m$ 的取值范围；

（Ⅱ）当圆 $C$ 与圆 $D:(x+3)^2+(y+1)^2=16$ 相外切时，求直线 $l:x+2y-4=0$ 被圆 $C$ 所截得的弦 $MN$ 的长.

18．（12 分）已知向量 $\vec{a}=(1,-2)$，$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$.

（1）若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，其中 $\lambda<0$，求 $\vec{b}$ 的坐标；

（2）若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，求 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$ 的值.

19．（12 分）已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_1=4$，前 $n$ 项和为 $S_n$，各项为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=\frac{1}{2}$，$2b_5=b_3-b_4$，$S_9b_4=9$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）在空间直角坐标系中，$O$ 为坐标原点，存在一系列的点 $P_n(a_n+2^n,c_n,-1)$，$Q_n(b_n,-1,1)$，若 $\overrightarrow{OP_n}\perp\overrightarrow{OQ_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

20．（12 分）“绿水青山，就是金山银山.”从社会效益和经济效益出发，某市准备投入资金进行生态环境建设，促进旅游业的发展．计划本年度投入 1200 万元，以后每年投入均比上年减少 20%，本年度旅游业收入估计为 400 万元，预计今后旅游业收入的年增长率相同．设本年度为第一年，已知前三年旅游业总收入为 1525 万元.

（Ⅰ）设第$n$年的投入为$a_n$万元，旅游业收入为$b_n$万元，写出$a_n$，$b_n$的表达式；

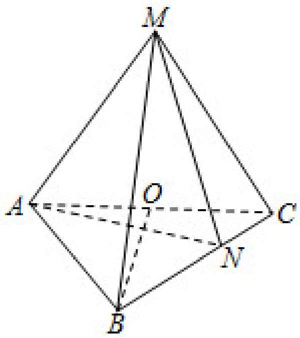
（Ⅱ）至少经过几年，旅游业的总收入才能超过总投入？

（参考数据：$lg2\approx 0.301$，$lg3\approx 0.477$)

21．（12分）已知三棱锥$M-ABC$中，$MA=MB=MC=AC=2\sqrt{2}$，$AB=BC=2$，$O$为$AC$的中点，点$N$在线$BC$上，且$\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

（1）证明：$BO\perp$平面$AMC$；

（2）求二面角$N-AM-C$的正弦值.




22．（12分）已知圆$O:x^2+y^2=4$和定点$A(1,0)$，平面上一动点$P$满足以线段$AP$为直径的圆内切于圆$O$，动点$P$的轨迹记为曲线$C$.

（1）求曲线$C$的方程；

（2）直线$l:y=k(x-4)(k\neq 0)$与曲线$C$交于不同两点$M$，$N$，直线$AM$，$AN$分别交$y$轴于$P$，$Q$两点. 求证：$|AP|=|AQ|$.

# 天一高二上第一次检测数学试卷

参考答案与试题解析

**一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上．**

1．（5 分）已知集合 $A=\{x\mid -2<x<5\}$，$B=\{x\mid 1-2x>3\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$(-2,-1)$　　B．$(-2,1)$　　C．$(1,5)$　　D．$(-1,5)$

【分析】先求出集合 $B$，然后结合集合的交集运算即可求解．

【解答】解：$A=\{x\mid -2<x<5\}$，$B=\{x\mid 1-2x>3\}=\{x\mid x<-1\}$，

则 $A\bigcap B=\{-2<x<-1\}$．

故选：$A$．

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．（5 分）不等式 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 的解集为$($　　$)$

A．$\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $\leqslant -1\}$　B．$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$　C．$\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x<-1\}$　D．$\{x\mid -1\leqslant x<1\}$

【分析】不等式等价于 $\dfrac{x+1}{x-1}\leqslant 0$，即 $(x+1)(x-1)\leqslant 0$，且 $x-1\neq 0$，由此求得不等式的解集．

【解答】解：不等式等价于 $\dfrac{x+1}{x-1}\leqslant 0$，即 $(x+1)(x-1)\leqslant 0$，且 $x-1\neq 0$，解得 $-1\leqslant x<1$，

故不等式的解集为 $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$，

故选：$D$．

【点评】本题主要考查分式不等式的解法，体现了等价转化的数学思想，属于基础题．

3．（5 分）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上为单调函数，则满足 $f(x)=f(\dfrac{x+2}{x+3})$ 的所有实数 $x$ 的和为$($　　$)$

A．$-6$　　B．6　　C．8　　D．$-8$

【分析】利用偶函数的性质，将方程转化为 $f(|x|)=f(|\dfrac{x+2}{x+3}|)$，再利用 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数，从而得到 $x=-\dfrac{x+2}{x+3}$ 或 $x=\dfrac{x+2}{x+3}$，然后化简变形，然后由韦达定理求解即可．

【解答】解：因为函数 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，

所以 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$，

又函数的图象是连续不断的，且在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数，

则 $f(x)=f(\frac{x+2}{x+3})$ 等价于 $f(|x|)=f(|\frac{x+2}{x+3}|)$，

所以 $x=-\frac{x+2}{x+3}$ 或 $x=\frac{x+2}{x+3}$，

即 $x^2+4x+2=0(x\neq-3)$ 或 $x^2+2x-2=0(x\neq-3)$，

设 $x^2+4x+2=0(x\neq-3)$ 的两个根为 $m$， $n$，则 $m+n=-4$，

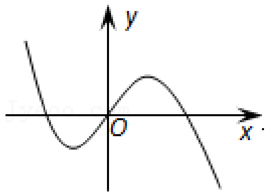
设 $x^2+2x-2=0(x\neq-3)$ 的两个根为 $a$， $b$，则 $a+b=-2$，

所以满足 $f(x)=f(\frac{x+2}{x+3})$ 的所有实数 $x$ 的和为 $-4-2=-6$.

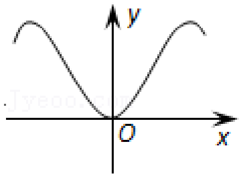
故选： $A$.

【点评】本题考查了函数与方程的综合应用，函数性质的应用，主要考查了函数奇偶性的应用以及单调性的应用，考查了逻辑推理能力与转化化归能力，属于中档题.

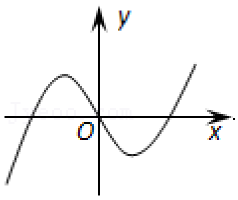
4.（5 分）已知函数 $f(x)=2x\cos x$，则函数 $f(x)$ 的部分图象可以为(　　)



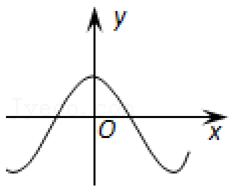

A.




B.




C.




D.

【分析】判断函数的奇偶性，排除选项，然后利用特殊值判断函数的图象上的点即可得到结果.

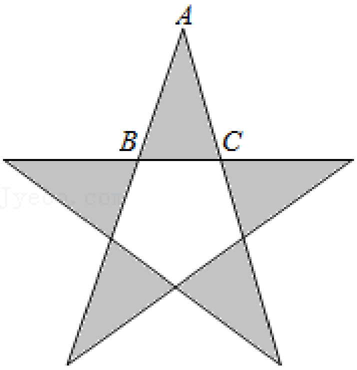
【解答】解：函数 $f(x)=2x\cos x$， $f(-x)=-2x\cos x=-f(x)$，所以函数是奇函数，排除 $B$、 $D$，

当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=2x\cos x>0$，函数的图象在第一象限，排除 $C$，

故选： $A$.

【点评】本题考查函数的图象的判断与应用，这类问题，一般通过函数的定义域，值域，单调性、奇偶性，以及函数的图象经过的特殊点判断.

5.（5 分）等腰三角形的底与腰之比是黄金分割比的三角形称为黄金三角形，它是一个顶角为 $36°$ 的等腰三角形．如图五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，其中一个黄金 $\Delta ABC$ 中， $\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．由上面可得 $\sin126°=(\quad)$




A．$\dfrac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B．$\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C．$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D．$\dfrac{4+\sqrt{5}}{8}$

【分析】由顶角是$36^\circ$的等腰三角形底边与腰的比值可得$18^\circ$的正弦值，再由诱导公式可得$\sin 126^\circ=\cos 36^\circ$，再由二倍角公式，求出$126^\circ$的正弦值．

【解答】解：由$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．$\Delta ABC$为等腰三角形且顶角$36^\circ$，

所以$\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\sin 126^\circ=\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，

故选：$C$．

【点评】本题考查黄金三角形的性质的应用及诱导公式和二倍角公式的应用，属于基础题．

6．（5分）设$\Delta ABC$的三边长为$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{b}{a+c}$，则$\Delta ABC$是(　　)

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　D．等腰直角三角形

【分析】利用正弦定理可得$\sin B+\sin C=1+\cos A$与$\sin A+\sin C=1+\cos B$，两式作差后平方，可得$\sin 2A=\sin 2B\Rightarrow A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，从而可得答案．

【解答】解：在$\Delta ABC$中，若$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$，则$\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}$，整理得$\sin B+\sin C=1+\cos A$①；

又$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{b}{a+c}$，同理可得$\sin A+\sin C=1+\cos B$②

①$-$②得，$\sin B-\sin A=\cos A-\cos B$，即$\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$，

$\therefore\sin 2A=\sin 2B$，

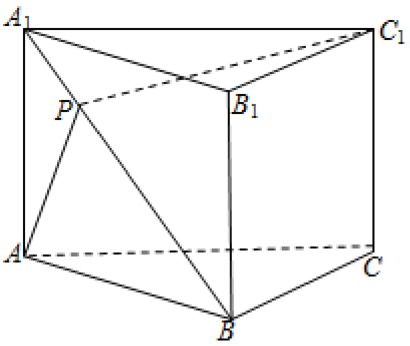
$\therefore A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，

则$\Delta ABC$是等腰三角形或直角三角形，

故选：$C$．

【点评】本题考查正弦定理，两角和的正弦的应用，考查运算求解能力，属于中档题．

7．（5 分）如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中．$AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{3}$，$P$ 是 $A_1B$ 上的一动点，则 $AP+PC_1$ 的最小值为(　　)




A．$\sqrt{5}$　　　　B．$\sqrt{7}$　　　　C．$1+\sqrt{3}$　　　　D．3

【分析】将立体图展开成平面图，设点 $C_1$ 的新位置为 $C'$，连接 $AC'$，即可得到 $AC'$ 即为 $AP+PC_1$ 的最小值，解三角形即可．

【解答】解：连接 $BC_1$，得△ $A_1BC_1$，以 $A_1B$ 所在直线为轴，将△ $A_1BC_1$ 所在平面旋转到平面 $ABB_1A_1$，

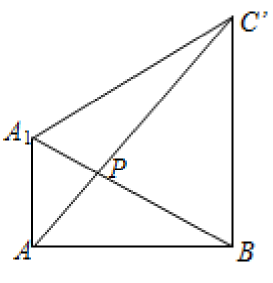
设点 $C_1$ 的新位置为 $C'$，连接 $AC'$，则 $AC'$ 即为 $AP+PC_1$ 的最小值，

由题意可知 $AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{3}$，得 $A_1B=BC'=A_1C'=2$，

$\angle AA_1B=\angle BA_1C'=60°$，

所以在△ $AA_1C'$ 中，$AC'=\sqrt{1+4-2\times1\times2\times(-\dfrac{1}{2})}=\sqrt{7}$，

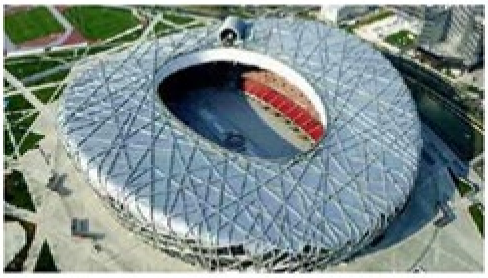
故选：$B$．

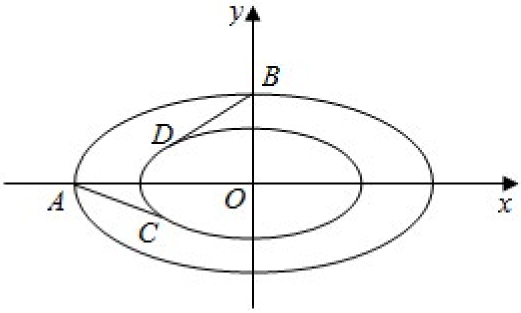



【点评】本题考查距离最小值问题，考查学生逻辑推理、数学运算、直观想象能力，属于中档题．

8．（5 分）第 24 届冬季奥林匹克运动会，将在 2022 年 02 月 04 日在中华人民共和国北京市和张家口市联合举行．这是中国历史上第一次举办冬季奥运会，北京成为奥运史上第一个举办夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会的城市．同时中国也成为第一个实现奥运“全满贯”（先后举办奥运会、残奥会、青奥会、冬奥会、冬残奥会）国家．根据规划，国家体育场（鸟巢）成为北京冬奥会开、闭幕式的场馆．国家

体育场“鸟巢”的钢结构鸟瞰图如图所示，内外两圈的钢骨架是离心率相同的椭圆，若由外层椭圆长轴一端点 $A$ 和短轴一端点 $B$ 分别向内层椭圆引切线 $AC$，$BD$（如图），且两切线斜率之积等于 $-\dfrac{9}{16}$，则椭圆的离心率为(　　)






A．$\dfrac{3}{4}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　　　C．$\dfrac{9}{16}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】设内层椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，外层椭圆设为 $\dfrac{x^2}{(ma)^2}+\dfrac{y^2}{(mb)^2}=1(m>1)$，设切线的方程为 $y=k_1(x+ma)$，分别与两个椭圆方程联立，求解 ${k_1}^2{k_2}^2=\dfrac{b^4}{a^4}=(-\dfrac{9}{16})^2$，然后求解离心率即可．

【解答】解：设内层椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为内外椭圆离心率相同，所以外层椭圆，

可设成，$\dfrac{x^2}{(ma)^2}+\dfrac{y^2}{(mb)^2}=1(m>1)$，

设切线的方程为 $y=k_1(x+ma)$，

切线的方程为 $y=k_1(x+a)$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 联立得，$(b^2+a^2{k_1}^2)x^2+2ma^3{k_1}^2x+m^2a^4{k_1}^2-a^2b^2=0$，

由$\triangle=0$，则 ${k_1}^2=\dfrac{b^2}{a^2}\times\dfrac{1}{(m^2-1)}$，同理 ${k_2}^2=\dfrac{b^2}{a^2}(m^2-1)$，

所以 ${k_1}^2{k_2}^2=\dfrac{b^4}{a^4}=(-\dfrac{9}{16})^2$，因此 $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$．

故选：$B$．

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，直线与椭圆的位置关系的应用，是中档题．

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．**

9．（5 分）在空间四点 $O$，$A$，$B$，$C$ 中，若 $\{\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}\}$ 是空间的一个基底，则下列说法正确的是(　　)

A．$O$，$A$，$B$，$C$ 四点不共线

B．$O$，$A$，$B$，$C$四点共面，但不共线

C．$O$，$A$，$B$，$C$四点不共面

D．$O$，$A$，$B$，$C$四点中任意三点不共线

【分析】根据基底的含义，非零向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不在同一平面内，即$O$，$A$，$B$，$C$四点不共面，从而可得结论．

【解答】解：因为$\{\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}\}$是空间的一个基底，

所以非零向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不在同一平面内，

即$O$，$A$，$B$，$C$四点不共面，

所以$A$、$C$、$D$选项说法正确，$B$错误．

故选：$ACD$．

【点评】本题考查空间向量基本定理中基底的含义，属于基础题．

10．（5分）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个顶点分别为$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$P$，$Q$的坐标分别为$(0,b)$，$(0,-b)$，且四边形$A_1PA_2Q$的面积为$2\sqrt{2}$，四边形$A_1PA_2Q$的内切圆的周长为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，则双曲线$C$的方程为(　　)

A．$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$　　B．$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$

【分析】四边形$A_1PA_2Q$ 的面积为$2\sqrt{2}$，$\therefore 4\times\dfrac{1}{2}\times a\times b=2\sqrt{2}$，再根据内切圆的周长可以求出内切圆的半径，再利用内切圆半径$\times$周长$\div 2=$四边形$A_1PA_2Q$的面积，进而得到关于$a$，$b$的两个方程，求解即可得答案．

【解答】解：四边形$A_1PA_2Q$ 的面积为$2\sqrt{2}$，

$\therefore 4\times\dfrac{1}{2}\times a\times b=2\sqrt{2}$，得$ab=\sqrt{2}$，

记四边形$A_1PA_2Q$ 内切圆半径为$r$，

则$2\pi r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，得$r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

$\therefore 2cr=2\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{3}$，

又$\because c^2=a^2+b^2=3$，

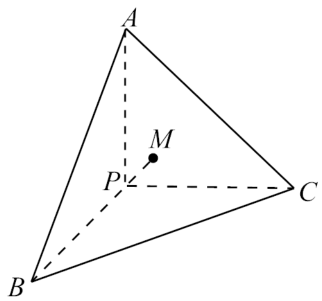
得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=1\end{cases}$，或$\begin{cases}a=1\\b=\sqrt{2}\end{cases}$，

$C$ 的方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 或$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

故选：$AB$.

【点评】本题考查双曲线方程的求法，本题四边形 $A_1PA_2Q$ 的面积用了两种方法计算，进而得到方程，考查了“算两次”思想在解题过程中的应用，属于中档题.

11.（5 分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp PB$，$PB\perp PC$，$PA\perp PC$，点$M$是$\Delta ABC$内的一点，若$PM$与平面$PAB$，$PAC$，$PBC$所成的角分别是$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\Delta PAB$，$\Delta PAC$，$\Delta PBC$，$\Delta ABC$的面积分别为$S_{\Delta PAB}$，$S_{\Delta PAC}$，$S_{\Delta PBC}$，$S_{\Delta ABC}$，则以下说法正确的是(　　)




A．$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

B．$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

C．$S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}>S_{\Delta ABC}$

D．$\Delta ABC$是锐角三角形

【分析】选项$A$，$B$，以$PM$为体对角线构造如图所示的长方体$DEMI-PHGF$，可判断;选项$C$，作$PO\perp$平面$ABC$于$O$，$PN\perp AB$于$N$，连结$MN$，可得$S_{\Delta PAB}>S_{\Delta OAB}$，同理$S_{\Delta PAC}>S_{\Delta OAC}$，$S_{\Delta PBC}>S_{\Delta OBC}$，可判断；选项$D$，设$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，在$\Delta ABC$中，利用余弦定理表示三个角的余弦，可判断.

【解答】解：如图所示，以$PM$为体对角线构造如图所示的长方体$DEMI-PHGF$，

则$PM$与平面$PAB$，$PAC$，$PBC$所成的角分别是$\alpha\beta\gamma$，即分别为$\angle IPM$，$\angle EPM$，$\angle GPM$，不妨设$DE=a$，$DI=b$，$DP=c$

则$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2+(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2+(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2=1$，故选项$A$正确；

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2+(\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2+(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})^2=2$，故选项$B$不正确；

如图所示，作$PO\perp$平面$ABC$于$O$，$PN\perp AB$于$N$，连结$MN$，

由三垂线定理可得，$MN\perp AB$，

由于$\Delta PON$为以$\angle O$为直角的直角三角形，因此$PN>ON$，

故$S_{\Delta PAB}>S_{\Delta OAB}$，同理$S_{\Delta PAC}>S_{\Delta OAC}$，$S_{\Delta PBC}>S_{\Delta OBC}$，

$\therefore S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}>S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}$，

故选项$C$正确；

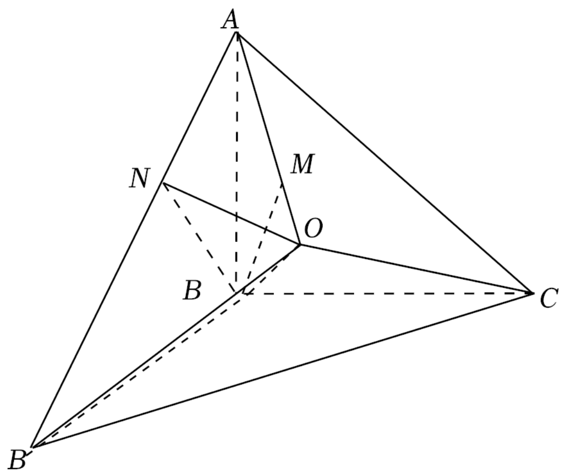
不妨设$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，则$AB=\sqrt{x^2+y^2},AC=\sqrt{x^2+z^2},BC=\sqrt{y^2+z^2}$，

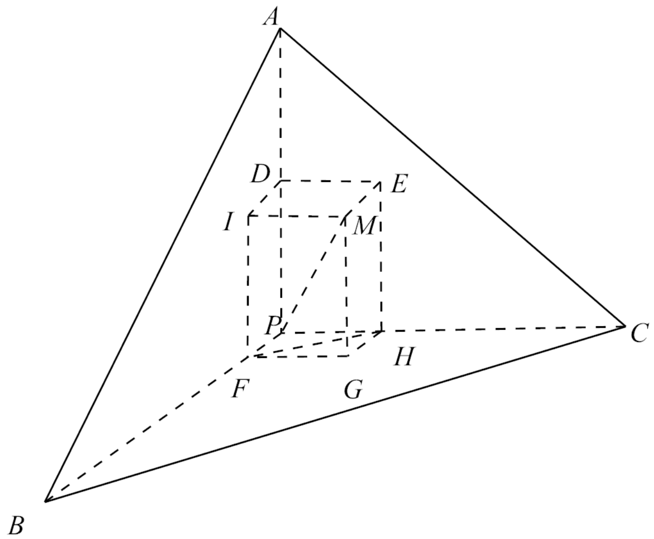
在$\Delta ABC$中，

$$\cos A=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+z^2}}>0,\cos B=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{y^2+z^2}}>0,\cos C=\frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}\cdot\sqrt{y^2+z^2}}>0，$$

因此$\Delta ABC$为锐角三角形，故选项$D$正确.

故选：$ACD$.






【点评】本题主要考查空间图形的综合问题，考查了学生空间想象，构造，综合分析，数学运算等能力等知识，属于中等题．

12．（5 分）设$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$为单位向量，满足$|2\vec{e}_1-\vec{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，$\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$，$\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos^2\theta$的可能取值为(　　)

A．$\dfrac{19}{20}$　　B．$\dfrac{20}{29}$　　C．$\dfrac{28}{29}$　　D．1

【分析】由已知结合向量数量积的性质先求出$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2$的范围，然后结合向量数量积的定义及夹角公式进行求解即可．

【解答】解：因为$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$为单位向量，且满足$|2\vec{e}_1-\vec{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$，

所以$4-4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+1\leqslant 2$，即$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}\geqslant\dfrac{3}{4}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{e_1}+\vec{e_2})\cdot(3\vec{e_1}+\vec{e_2})=4+4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$，$|\vec{a}|^2=(\vec{e_1}+\vec{e_2})^2=2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$，$|\vec{b}|^2=(3\vec{e_1}+\vec{e_2})^2=10+6\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$，

则$\cos^2\theta=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\dfrac{(4+4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})^2}{(2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})(10+6\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})}=\dfrac{4(1+\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})}{5+3\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}}=\dfrac{4}{3}(1-\dfrac{2}{5+3\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}})\geqslant\dfrac{4}{3}(1-\dfrac{2}{5+3\times\dfrac{3}{4}})=\dfrac{28}{29}$

故选：$CD$．

【点评】本题主要考查了向量数量积性质的综合应用，考查了函数取值范围的求解，属于中档题．

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分**

13．（5 分）一只袋子中装有 7 个红玻璃球，3 个绿玻璃球，从中无放回地任意抽取两次，每次只取一个，取得两个红球的概率为$\dfrac{7}{15}$，取得两个绿球的概率为$\dfrac{1}{15}$，则至少取得一个红球的概率为\_\_$\dfrac{14}{15}$__．

【分析】利用对立事件的概率公式求解即可．

【解答】解：由题意，取得两个绿玻璃球的概率为$\frac{1}{15}$，

所以至少取得一个红球的概率为$1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

故答案为：$\frac{14}{15}$.

【点评】本题考查了对立事件概率公式的理解与应用，属于基础题.

14.（5 分）若复数$z$满足$|z-3+2i|=1$，则$|z-6-2i|$的最小值为 $\underline{\ \ 4\ \ }$.

【分析】利用复数的几何意义，先确定复数$z$对应的点$Z$的轨迹是以$C(3,-2)$为圆心，半径为 1 的圆，$|z-6-2i|$表示复数$z$对应的点$Z$与点$P(6,2)$之间的距离，然后由圆的几何性质分析求解即可.

【解答】解：因为复数$z$满足$|z-3+2i|=1$，

则复数$z$对应的点$Z$的轨迹是以$C(3,-2)$为圆心，半径为 1 的圆，

又$|z-6-2i|$表示复数$z$对应的点$Z$与点$P(6,2)$之间的距离，

所以$|z-6-2i|$的最小值为$PC-1=\sqrt{(6-3)^2+(2+2)^2}-1=5-1=4$.

故答案为：4.

【点评】本题考查了复数模的几何意义的理解与应用，圆的几何性质的运用，两点间距离公式的应用，考查了逻辑推理能力与转化化归能力，属于基础题.

15.（5 分）已知一组数据$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$的平均数为$\overline{x}$，方差为$s^2$.若$3x_1+1$，$3x_2+1$，$3x_3+1$，…，$3x_n+1$的平均数比方差大 4，则$s^2-\overline{x}^2$的最大值为 $\underline{\ \ -1\ \ }$.

【分析】根据已知条件，结合平均数和方差的公式，即可求解.

【解答】解：设新数据$3x_1+1$，$3x_2+1$，$3x_3+1$，…，$3x_n+1$的平均数为$\overline{x_1}$，方差为$s_1^2$，

$\because$一组数据$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$的平均数为$\overline{x}$，方差为$s^2$，

$\therefore\ \overline{x_1}=3\overline{x}+1$，$s_1^2=9s^2$，

$\because 3x_1+1$，$3x_2+1$，$3x_3+1$，…，$3x_n+1$的平均数比方差大 4，

$\therefore\ 3\overline{x}+1=9s^2+4$，

$\therefore\ s^2=\frac{1}{3}\overline{x}-\frac{1}{3}$，

$\because\ s^2-\overline{x}^2=\frac{1}{3}\overline{x}-\frac{1}{3}-\overline{x}^2=-(\overline{x}-\frac{1}{6})^2-\frac{11}{36}$，

又$\because\ s^2=\frac{1}{3}\overline{x}-\frac{1}{3}\geqslant 0$，

$\therefore \overline{x} \geqslant 1$，

故当$\overline{x}=1$时，

$s^2-\overline{x}^2$取得最大值，最大值为$-1$．

故答案为：$-1$．

【点评】本题主要考查方差与平均数的求解，掌握二次函数的性质是解本题的关键，属于基础题．

16.（5分）在$\Delta ABC$中，$a$，$b$，$c$分别为内角$A$，$B$，$C$的对边，$O$为$\Delta ABC$的外心，且有$AB+BC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AC$，$\sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos C\sin A=0$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$x$，$y\in R$，则$x-2y=$\_\_$-3$__．

【分析】设三角形的内角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，运用三角函数的和角公式和正弦定理、余弦定理，求得$B$，$A$，$C$，再将$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$的两边点乘$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，运用向量数量积的定义和性质，可得$x$，$y$的方程组，解方程组得$x$，$y$的值，计算即可．

【解答】解：设三角形的内角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，

$AB+BC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AC$，$\sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos C\sin A=0$，

可得$c+a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b$，$\sin C\cos A+\cos C\sin A=\sqrt{3}\sin C$，

即为$\sin(C+A)=\sqrt{3}\sin C$，即有$\sin B=\sqrt{3}\sin C$，

可得$b=\sqrt{3}c$，$a=c$，

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{c^2+c^2-3c^2}{2c^2}=-\dfrac{1}{2}$，

可得$B=120^{\circ}$，$A=C=30^{\circ}$，

若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$可得$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，

即有$\dfrac{1}{2}c^2=xc^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\cdot\sqrt{3}c^2$，

化为$2x+3y=1$，…①

又可得$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}^2$，

即有$\dfrac{3}{2}c^2=\dfrac{3}{2}xc^2+y\cdot 3c^2$，

化为$x+2y=1$，…②

由①②解得$x=-1$，$y=1$，

所以$x-2y=-1-2\times 1=-3$．

故答案为：$-3$．

【点评】本题考查了解三角形的应用问题，也考查了平面向量数量积的定义和性质，以及三角形函数的化简和求值问题，是中档题．

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**

17．（10分）已知圆$C$的方程：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$．

（Ⅰ）求$m$的取值范围；

（Ⅱ）当圆$C$与圆$D:(x+3)^2+(y+1)^2=16$相外切时，求直线$l:x+2y-4=0$被圆$C$所截得的弦$MN$的长．

【分析】（Ⅰ）根据圆的一般方程表示圆的条件即可求$m$的取值范围；

（Ⅱ）根据圆与圆相切的等价条件求出$m$的值，结合直线的弦长公式进行求解即可．

【解答】解：（Ⅰ）圆$C$的方程可化为$(x-1)^2+(y-2)^2=5-m$ …（2分）

令$5-m>0$，得$m<5$． …（4分）

（Ⅱ）圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=5-m$，圆心$C(1,2)$，半径$r=\sqrt{5-m}$

圆$D:(x+3)^2+(y+1)^2=16$，圆心$D(-3,-1)$，半径$R=4$…（6分）

$\because$圆$C$与圆$D$相外切

$\therefore\sqrt{(1+3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{5-m}+4$，解得$m=4$ …（8分）

圆心$C(1,2)$到直线$l:x+2y-4=0$的距离为$d=\dfrac{|1+4-4|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ …（10分）

$\therefore|MN|=2\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ …（12分）

【点评】本题主要考查圆与圆的位置关系的应用以及直线和圆相交的弦长公式的计算，考查学生的计算能力．

18．（12分）已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$．

（1）若$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，其中$\lambda<0$，求$\vec{b}$的坐标；

（2）若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，求$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$的值．

【分析】（1）根据题意，可得$\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda,-2\lambda)$，由向量模的计算公式可得$\lambda$的值，即可得答案；

（2）根据题意，求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值，又由数量积的运算性质计算可得答案．

【解答】解：（1）根据题意，若$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则$\vec{b}=\lambda\vec{a}=(\lambda,-2\lambda)$，

又由$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$，则$5\lambda^2=20$，解可得$\lambda=\pm2$，

又由 $\lambda<0$，则 $\lambda=-2$，

则 $\vec{b}=(-2,4)$；

（2）根据题意，向量 $\vec{a}=(1,-2)$，则 $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，

又由 $|\vec{b}|=2\sqrt{5}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times\cos\frac{2\pi}{3}=-5$，

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=10-20+5=-5$.

【点评】本题考查向量数量积性质以及运算，涉及向量数量积的计算，属于基础题.

19.（12 分）已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_1=4$，前 $n$ 项和为 $S_n$，各项为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=\frac{1}{2}$，$2b_5=b_3-b_4$，$S_9b_4=9$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）在空间直角坐标系中，$O$ 为坐标原点，存在一系列的点 $P_n(a_n+2^n,c_n,-1)$，$Q_n(b_n，-1，1)$，若 $\overrightarrow{OP_n}\perp\overrightarrow{OQ_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

【分析】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，$\{b_n\}$ 的公比为 $q$，运用等差数列和等比数列的通项公式，解方程可得所求；

（2）由数列的错位相减法求和，结合等比数列的求和公式，计算可得所求和.

【解答】解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，$\{b_n\}$ 的公比为 $q$，

$\because 2b_5=b_3-b_4$，$\therefore 2q^2=1-q$，得 $q=\frac{1}{2}$，$q=-1$（舍），又 $b_1=\frac{1}{2}$，$\therefore b_n=b_1q^{n-1}=\frac{1}{2^n}$.

$\because S_9b_4=9$，$\therefore 9a_5\times\frac{1}{2^4}=9$，解得 $a_5=16$，

又 $a_1=4$，$\therefore d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{12}{4}=3$，

$\therefore a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$.

（2）由（1）得 $a_n=3n+1$，$b_n=\frac{1}{2^n}$.

$\because \overrightarrow{OP_n}\perp\overrightarrow{OQ_n}$，$\therefore a_nb_n+2^nb_n-c_n-1=0$，$\therefore c_n=\frac{3n+1}{2^n}$.

$\therefore T_n=\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\ldots+\frac{3n+1}{2^n}$，①

①式等号两边同乘以 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{T_n}{2}=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\ldots+\frac{3n+1}{2^{n+1}}$，②

①－②得 $\frac{T_n}{2}=\frac{4}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{3}{2^n}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n})-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+3\times\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{7}{2}-\frac{3n+7}{2^{n+1}}$．

$\therefore T_n=7-\frac{3n+7}{2^n}$．

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，错位相减法求和，属于 中档题．

20．（12 分）“绿水青山，就是金山银山．”从社会效益和经济效益出发，某市准备投入资金进行生态环境建设，促进旅游业的发展．计划本年度投入 1200 万元，以后每年投入均比上年减少 20%，本年度旅游业收入估计为 400 万元，预计今后旅游业收入的年增长率相同．设本年度为第一年，已知前三年旅游业总收入为 1525 万元．

（Ⅰ）设第 $n$ 年的投入为 $a_n$ 万元，旅游业收入为 $b_n$ 万元，写出 $a_n$，$b_n$ 的表达式；

（Ⅱ）至少经过几年，旅游业的总收入才能超过总投入？

（参考数据：$lg2\approx 0.301$，$lg3\approx 0.477$）

【分析】（Ⅰ）由题意知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等比数列，根据条件中的数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比直接写出通项公式，设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$，根据三年内旅游业总收入求得 $q$，从而求得 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设至少经过 $n$ 年，旅游业的总收入才能超过总投入．分别计算出经过 $n$ 年，总投入和旅游业总收入，根据不等关系列出表达式，解得 $n$ 的最小值即可．

【解答】解：（Ⅰ）由题意知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等比数列，

数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1200，公比为 $1-20\%=\frac{4}{5}$，

所以 $a_n=1200\cdot(\frac{4}{5})^{n-1}$，

设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$，显然 $q>0$，$q\neq 1$．

所以三年内旅游业总收入为 $\frac{400(1-q^3)}{1-q}=1525$，即 $1+q+q^2=\frac{61}{16}$，

所以 $16q^2+16q-45=0$，解得 $q=\frac{5}{4}$ 或 $q=-\frac{9}{4}$（舍）

所以 $b_n=400\cdot(\frac{5}{4})^{n-1}$．

（Ⅱ）设至少经过 $n$ 年，旅游业的总收入才能超过总投入．

则经过 $n$ 年，总投入为 $\frac{1200[1-(\frac{4}{5})^n]}{1-\frac{4}{5}}=6000[1-(\frac{4}{5})^n]$，

经过$n$ 年，旅游业总收入为$\dfrac{400[1-(\frac{5}{4})^n]}{1-\frac{5}{4}}=1600[(\frac{5}{4})^n-1]$，

所以$1600[(\frac{5}{4})^n-1]>6000[1-(\frac{4}{5})^n]$，化简得$15\cdot(\frac{4}{5})^n+4\cdot(\frac{5}{4})^n-19>0$，

设$t=(\frac{4}{5})^n(0<t<1)$，代入上式得$15t^2-19t+4>0$，

解此不等式，得$t>1$（舍去）或$t<\frac{4}{15}$，

即$(\frac{4}{5})^n<\frac{4}{15}$，解得$n>log_{\frac{4}{5}}\frac{4}{15}=\frac{2lg2-(lg3+lg5)}{2lg2-lg5}=\frac{3lg2-lg3-1}{3lg2-1}\approx 5.9$，

由此得$n\geqslant 6$.

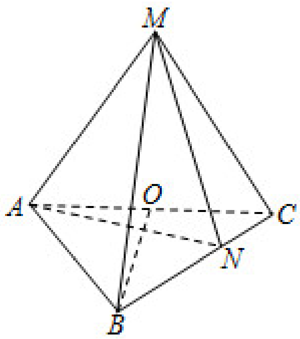
所以至少经过 6 年，旅游业的总收入才能超过总投入.

【点评】本题考查等比数列及其前$n$项和的实际应用，考查学生的应用数列模型的能力和运算能力，属中档题.

21.（12 分）已知三棱锥$M-ABC$中，$MA=MB=MC=AC=2\sqrt{2}$，$AB=BC=2$，$O$为$AC$的中点，点$N$在线$BC$上，且$\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

（1）证明：$BO\perp$平面$AMC$；

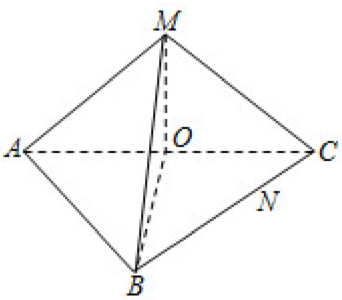
（2）求二面角$N-AM-C$的正弦值.




【分析】(1）只需证明$OB\perp AC$及$OB\perp OM$即可；

（2）建立空间直角坐标系，求出两个平面的法向量，利用向量公式求解即可.

【解答】解：(1) 如图所示：




连接$OM$， $AC$， $OM$ 相交于$O$，

在$\Delta ABC$中： $AB=BC=2, AC=2\sqrt{2}$，则$\angle ABC=90°, BO=\sqrt{2}$， $OB\perp AC$.

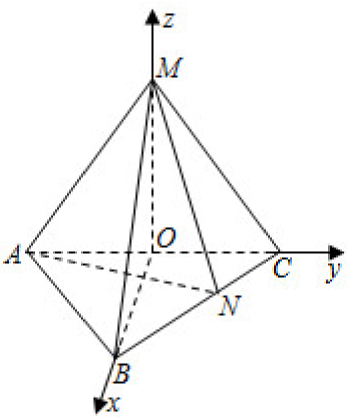
在$\Delta MAC$中： $MA=MC=AC=2\sqrt{2}$， $O$为$AC$的中点，则$OM\perp AC$，且$OM=\sqrt{6}$.

在$\Delta MOB$中： $BO=\sqrt{2}, OM=\sqrt{6}, MB=2\sqrt{2}$，满足： $BO^2+OM^2=MB^2$

根据勾股定理逆定理得到$OB\perp OM$，

故$OB\perp$平面$AMC$；

（2）因为$OB$， $OC$， $OM$ 两两垂直，建立空间直角坐标系$O-xyz$如图所示.




因为$MA=MB=MC=AC=2\sqrt{2}$， $AB=BC=2$

则 $A(0,-\sqrt{2},0), B(\sqrt{2},0,0), C(0,\sqrt{2},0), M(0,0,\sqrt{6})$，

由 $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ 所以， $N(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},0)$

设平面$MAN$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AN}\cdot\vec{m}=(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5\sqrt{2}}{3},0)\cdot(x,y,z)=\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{5\sqrt{2}}{3}y=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}=(0,\sqrt{2},\sqrt{6})\cdot(x,y,z)=\sqrt{2}y+\sqrt{6}z=0\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$， 得 $\vec{m}=(-5\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$，

因为$BO\perp$平面$AMC$，所以$\overrightarrow{OB}=(\sqrt{2},0,0)$为平面$AMC$的法向量，

所以$\vec{m}=(-5\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$与$\overrightarrow{OB}=(\sqrt{2},0,0)$所成角的余弦为$\cos<\vec{m},\overrightarrow{OB}>=\dfrac{-5\sqrt{6}}{\sqrt{79}\sqrt{2}}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

所以二面角的正弦值为$|\sin<\vec{m},\overrightarrow{OB}>|=\sqrt{1-(\dfrac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{79}})^2}=\dfrac{2}{\sqrt{79}}=\dfrac{2\sqrt{79}}{79}$.

【点评】本题考查线面垂直的判定及二面角正弦值的求法，考查空间向量在立体几何中运用，属于常规题目.

22.（12分）已知圆$O:x^2+y^2=4$和定点$A(1,0)$，平面上一动点$P$满足以线段$AP$为直径的圆内切于圆$O$，动点$P$的轨迹记为曲线$C$.

（1）求曲线$C$的方程；

（2）直线$l:y=k(x-4)(k\neq 0)$与曲线$C$交于不同两点$M$，$N$，直线$AM$，$AN$分别交$y$轴于$P$，$Q$两点.求证：$|AP|=|AQ|$.

【分析】（1）由两圆内切的条件和椭圆的定义，可得所求轨迹方程；

（2）设$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，联立直线$l$的方程和椭圆方程，运用韦达定理，计算$k_{MA}+k_{NA}$，可判断三角形$APQ$的形状，即可得到证明.

【解答】解：（1）设以线段$AP$为直径的圆的圆心为$C$，取$A'(-1,0)$.

依题意，圆$C$内切于圆$O$，设切点为$D$，则$O$，$C$，$D$三点共线，

因为$O$为$AA'$的中点，$C$为$AP$中点，

所以$|A'P|=2|OC|$.

所以$|PA'|+|PA|=2OC+2AC=2OC+2CD=2OD=4>|AA'|=2$，

所以动点$P$的轨迹是以$A$，$A'$为焦点，长轴长为4的椭圆，

设其方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则$2a=4$，$2c=2$，

所以$a=2$，$c=1$，

所以$b^2=a^2-c^2=3$，

所以动点$P$的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）证明：设$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-4)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，

得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

依题意$\triangle=(-32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$，即 $0<k^2<\dfrac{1}{4}$，

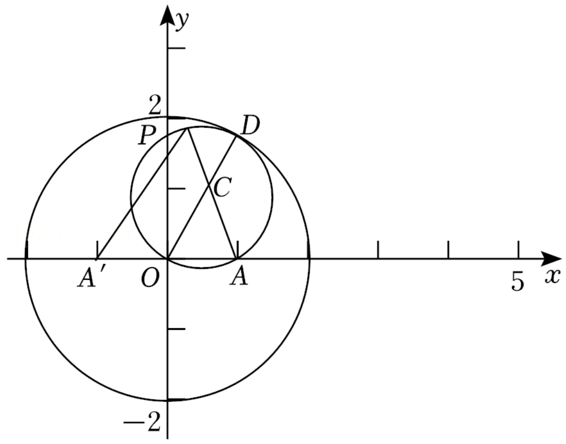
$x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}$，

为 $k_{MA}+k_{NA}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-4)}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-4)}{x_2-1}=\dfrac{k[x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\dfrac{k[2\cdot(\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2})-5\cdot(\dfrac{32k^2}{3+4k^2})+8]}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$，

所以直线 $MP$ 倾斜角与直线 $NQ$ 倾斜角互补，即 $\angle OAP=\angle OAQ$ .

因为 $OA\perp PQ$，所以 $|AP|=|AQ|$ .




【点评】本题考查轨迹方程的求法，以及直线和椭圆的位置关系，考查方程思想和运算能力、推理能力，属于中档题.