2024-2025 省锡中上学期第一次月考数学

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设 m 为实数，已知直线 l_1：$mx+2y-2=0$，l_2：$5x+(m-3)y-5=0$，若 $l_1//l_2$，则 $m=$（　　）

A. -5　　B. 2　　C. 2 或 -5　　D. 5 或 -2

【答案】D

【解析】

【分析】根据两直线平行的充要条件得到方程，求出 m 的值，再代入检验即可.

【详解】因为直线 l_1：$mx+2y-2=0$ 与直线 l_2：$5x+(m-3)y-5=0$ 平行，

所以 $m(m-3)=2\times5$，解得 $m=-2$ 或 $m=5$，

当 $m=-2$ 时直线 l_1：$x-y+1=0$ 与直线 l_2：$x-y-1=0$ 平行，符合题意；

当 $m=5$ 时直线 l_1：$5x+2y-2=0$ 与直线 l_2：$5x+2y-5=0$ 平行，符合题意.

综上可得：$m=-2$ 或 $m=5$.

故选：D

2. 已知椭圆的 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦距为 2，则 m 的值为（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3 或 5　　D. $\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意先求出 c 的值，根据椭圆方程的标准形式，求出 m 的值.

【详解】由题有 $2c=2$，所以 $c=1$.

当椭圆方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点在 x 轴时，

$m>4$ 且 $m-4=1$，解得 $m=5$；

当椭圆方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的交点在 y 轴时，

$0<m<4$ 且 $4-m=1$，解得 $m=3$；

$\therefore m$的值为 5 或 3.

故选 C.

3. 若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点$F\left(c,0\right)$到其渐近线的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，则$\dfrac{b}{c}=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用点到直线的距离公式及双曲线的性质计算即可.

【详解】易知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线为$y=\dfrac{b}{a}x$，

故$F\left(c,0\right)$到其距离为$d=\dfrac{\left|\dfrac{bc}{a}\right|}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}=b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，

所以$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A

4. 在平面直角坐标系xOy中，已知点$A\left(3,0\right)$，动点$P\left(x,y\right)$满足$\dfrac{|PA|}{|PO|}=2$，则动点P的轨迹与圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$的位置关系是（　　）

A. 外离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

【答案】C

【解析】

【分析】利用已知条件列出方程，化简可得点P的轨迹方程为圆，再判断圆心距和半径的关系即可得解.

【详解】由$\dfrac{PA}{PO}=2$，得$|PA|=2|PO|$，

则$\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，整理得$\left(x+1\right)^2+y^2=4$，

表示圆心为$\left(-1,0\right)$，半径为$R=2$的圆，

圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$的圆心为$(1,1)$为圆心，半径$r=1$，

两圆的圆心距为$\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$，满足$2-1<\sqrt{5}<2+1$，

所以两个圆相交.

故选：C.

5. 设P为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$上的任意一点，$F_1$，$F_2$为其上、下焦点，则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的最大值是（　　）

A. 4　　　　B. 6　　　　C. 9　　　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】利用椭圆的定义和基本不等式求解即可.

【详解】椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，

故$|PF_1|+|PF_2|=6\geq 2\sqrt{|PF_1|\cdot|PF_2|}$，

故$|PF_1|\cdot|PF_2|\leq 9$，当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=3$时，等号成立.

故选：C

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过点$A(\sqrt{2},0)$的直线$l$与双曲线有且仅有一个交点$B(2\sqrt{2},1)$（非切点），则该双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$　　　　B. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　　　C. $\frac{x^2}{2}-3y^2=1$　　　　D. $x^2-y^2=7$

【答案】A

【解析】

【分析】由条件可得双曲线的渐近线与直线AB平行，双曲线过点$B(2\sqrt{2},1)$，然后可算出答案.

【详解】因为过点$A(\sqrt{2},0)$的直线l与双曲线有且仅有一个交点$B(2\sqrt{2},1)$（非切点），

所以双曲线的渐近线与直线AB平行，双曲线过点$B(2\sqrt{2},1)$

所以$\frac{b}{a}=\frac{1-0}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}},\frac{8}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，解得$a=\sqrt{6},b=\sqrt{3}$

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

故选：A

7. 已知O为坐标原点，双曲线C的渐近线方程是$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，且经过点$M\left(3\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，过$C$的右焦点$F$的直线与$C$两条渐近线分别交于点A，$B$，以$OA$为直径的圆$M$过点$B$，则下列说法不正确的是（　　）

A. 双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$

B. 直线AB的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

C. 圆M的面积等于9π

D. $\triangle OAF$与$\triangle OAB$的面积之比为$2:5$

【答案】D

【解析】

【分析】设双曲线方程为$y^2-\dfrac{1}{3}x^2=\lambda$，代入$M\left(3\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$求出双曲线的标准方程可判断A；$OB\perp AB$，根据渐近线方程和倾斜角可得直线$AB$的倾斜角可判断B；根据双曲线的对称性，设$AB$的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，求出直线$AB$的方程分别与两条渐近线方程联立，解得A，$B$点坐标，求出$|OA|$得圆$M$的半径，求出圆的面积可判断C；$OF$为$\triangle OAF$与$\triangle OBF$的公共边，$\triangle OAF$与$\triangle OBF$的面积之比等于$\dfrac{|y_A|}{|y_B|}$可判断D.

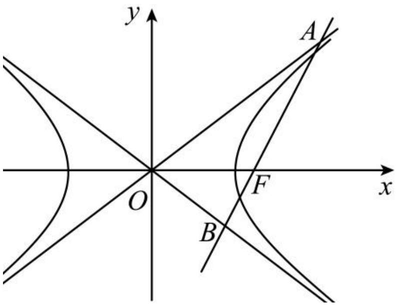
【详解】对于A，∵双曲线的渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，∴设双曲线方程为$y^2-\dfrac{1}{3}x^2=\lambda$，∵双曲线经过点$M\left(3\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，$\therefore 3-\dfrac{1}{3}\times 18=\lambda$，得$\lambda=-3$.∴双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$，故A正确；

对于B，∵以OA为直径的圆M过点B，$\therefore OB\perp AB$，又渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，可得渐近线的倾斜角分别为$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，则$\angle FOB=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle BFO=\dfrac{\pi}{3}$，则直线$AB$的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$，故B正确；

对于C，根据双曲线的对称性，不妨设AB的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，由$F\left(2\sqrt{3},0\right)$，可得直线$AB$的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-2\sqrt{3}\right)$，分别与两条渐近线方程联立，解得$A\left(3\sqrt{3},3\right)$，$B\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，此时$|OA|=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=6$，故圆$M$的半径$r=\dfrac{1}{2}|OA|=3$，其面积为$9\pi$，故C正确；对于D，∵$OF$为

$\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的公共边，∴ $\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的面积之比等于 $\dfrac{|y_A|}{|y_B|}=\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=2$，故 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OAB$ 的面积之比为 $2:3$，故 D 错误.

故选：D.



8. 设直线 $l: x+y-1=0$，一束光线从原点 O 出发沿射线 $y=kx\left(x\geqslant 0\right)$ 向直线 l 射出，经 l 反射后与 x 轴交于点 M，再次经 x 轴反射后与 y 轴交于点 N. 若 $|MN|=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$，则 k 的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$

B. $\dfrac{2}{3}$

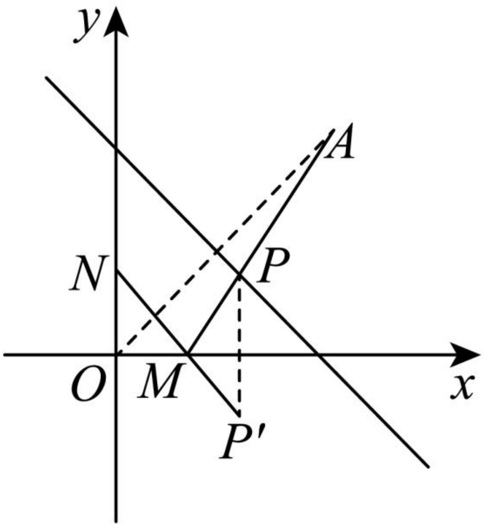
C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据光学的性质，根据对称性可先求 O 关于直线 l 的对称点 A，后求直线 AP，可得 M 、N 两点坐标，进而由 $|MN|=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$ 可得 k.

【详解】

如图，设点O关于直线l的对称点为$A\left(x_1,y_1\right)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{y_1}{2}-1=0\\ \dfrac{y_1}{x_1}\times(-1)=-1\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\end{cases}$，即$A(1,1)$，

由题意知$y=kx\left(x\geq 0\right)$与直线l不平行，故$k\neq -1$，

由$\begin{cases}y=kx\\ x+y-1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{k+1}\\ y=\dfrac{k}{k+1}\end{cases}$，即$P\left(\dfrac{1}{k+1},\dfrac{k}{k+1}\right)$，

故直线AP的斜率为$k_{AP}=\dfrac{\dfrac{k}{k+1}-1}{\dfrac{1}{k+1}-1}=\dfrac{1}{k}$，

直线AP的直线方程为：$y-1=\dfrac{1}{k}\left(x-1\right)$，

令$y=0$得$x=1-k$，故$M\left(1-k,0\right)$，

令$x=0$得$y=1-\dfrac{1}{k}$，故由对称性可得$N\left(0,\dfrac{1}{k}-1\right)$，

由$\left|MN\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$得$(1-k)^2+\left(\dfrac{1}{k}-1\right)^2=\dfrac{13}{36}$，即$\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^2-2\left(k+\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{13}{36}$，

解得$k+\dfrac{1}{k}=\dfrac{13}{6}$，得$k=\dfrac{2}{3}$或$k=\dfrac{3}{2}$，

若$k=\dfrac{3}{2}$，则第二次反射后光线不会与y轴相交，故不符合条件．

故 $k=\frac{2}{3}$，

故选：B.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 设 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，且 $|PF_1|-|PF_2|=2$．则下列说法中正确的是（　　）

A. $|PF_1|=5$，$|PF_2|=3$

B. $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 6

D. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 12

【答案】ABC

【解析】

【分析】由椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=8$，结合 $|PF_1|-|PF_2|=2$ 可求出 $|PF_1|,|PF_2|$ 的值，然后逐个分析判断即可.

【详解】由 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，得 $a^2=16,b^2=12$，则

$a=4,b=2\sqrt{3},c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，

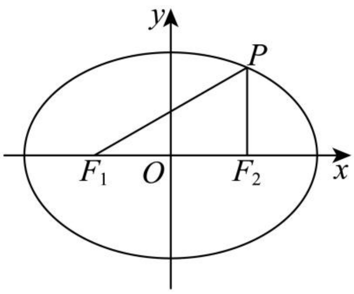
因为 P 是椭圆上一点，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$，

因为 $|PF_1|-|PF_2|=2$，所以 $|PF_1|=5$，$|PF_2|=3$，所以 A 正确，

对于 B，因为 $|F_1F_2|=2c=4$，所以 $|PF_2|^2+|F_1F_2|^2=|PF_1|^2$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，所以 B 正确，

对于 CD，因为 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，$PF_2\perp F_1F_2$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，所以 C 正确，D 错误.

故选：ABC.



10. 已知圆 $O:x^2+y^2=4$，则（　　）

A. 圆 O 与直线 $mx+y-m-1=0$ 必有两个交点

B. 圆 O 上存在 4 个点到直线 $l: x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离都等于 1

C. 圆 O 与圆 $x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 恰有三条公切线，则 $m=16$

D. 动点 P 在直线 $x+y-4=0$ 上，过点 P 向圆 O 引两条切线， A、B 为切点，则四边形 $PAOB$ 面积最小值为 2

【答案】AC

【解析】

【分析】根据直线切过定点 $(1,1)$ 切该定点在圆内可判断 A；求出圆的圆心到直线 l 的距离可判断 B；将圆 $x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 化成标准形式为，转化为两圆外切可判断 C；由 $S_{PAOB}=2S_{\triangle POA}=2S_{\triangle POB}$，且当 PO 最小时 $S_{\triangle POA}$ 最小时可判断 D.

【详解】对于 A，将直线 $mx+y-m-1=0$ 整理得 $(x-1)m+y-1=0$，由 $\begin{cases}x-1=0\\y-1=0\end{cases}$，

知 $x=1, y=1$，所以直线 $mx+y-m-1=0$ 过定点 $(1,1)$，因为 $1^2+1^2<4$，

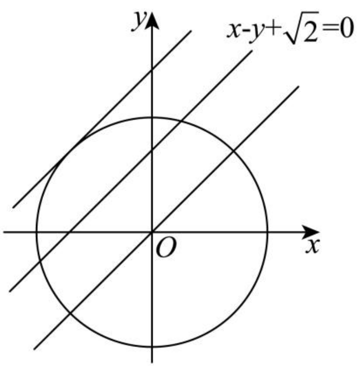
所以该定点在圆内，故 A 正确；

对于 B，圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心到直线 $l: x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$，

所以过圆心且与直线 l 平行的直线与圆相交有两个点到直线 l 的距离为 1，

与直线 l 平行且与圆相切，并且与直线 l 在圆心同侧的直线到 l 的距离为 1，

所以只有三个点满足题意，故 B 错误；



对于 C，将圆 $x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 化成标准形式为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$，

因为两圆有三条公切线，所以两圆外切，所以 $\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{25-m}+2$，

解得 $m=16$，故 C 正确；

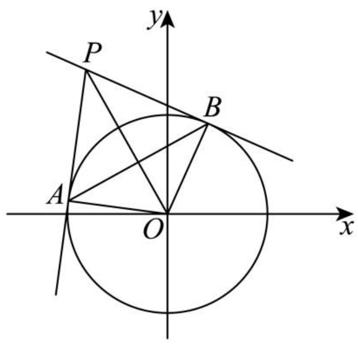
对于 D，连接 OP,OA,OB，因为 A,B 为切点，所以 $OA\perp PA,OB\perp PB$，

所以 $S_{PAOB}=2S_{\triangle POA}=2S_{\triangle POB}$，且当 PO 最小时，$S_{\triangle POA}$ 最小，

所以当 PO 与直线垂直时，$PO_{\min}=\dfrac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，又因为半径为 2，

所以 $PA=\sqrt{PO^2-OA^2}=2$，

所以 $S_{\triangle POA\min}=\dfrac{1}{2}PA\times AO=2,S_{PAOB\min}=2S_{\triangle POA\min}=4$，故 D 错误.



故选：AC.

11. 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交双曲线 C 的右支于 P，Q 两点，则下列叙述正确的是（　　）

A. 直线 PF_1 与直线 PF_2 的斜率之积为 $\dfrac{3}{2}$

B. $|PQ|$ 的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

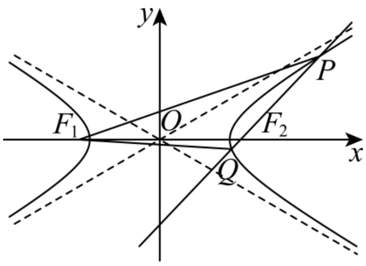
C. 若 $|PQ|=2\sqrt{3}$，则 $\triangle PF_1Q$ 的周长为 $8\sqrt{3}$

D. 点 P 到两条渐近线的距离之积 $\dfrac{6}{5}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】由双曲线的定义和条件，易得结论；设 $P(m,n)$，则 $2m^2-3n^2=6$，计算直线 PF_1 与直线 PF_2 的斜率之积，其到两条渐近线的距离之积，判断选项 A、D；利用双曲线的定义和性质可判断选项 B、C.

【详解】

如图，$F_1(-\sqrt{5},0),F_2(\sqrt{5},0)$，

设$P(m,n)$，则$2m^2-3n^2=6$，

又$k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=\dfrac{n}{m+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{n}{m-\sqrt{5}}=\dfrac{n^2}{m^2-5}=\dfrac{\frac{2}{3}\left(m^2-3\right)}{m^2-5}$，故 A 错误；

由双曲线的焦点弦的性质，可得过焦点垂直于x轴的弦的长度最小，

即$|PQ|$的最小值为$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故 B 正确；

由双曲线的定义得$|PF_1|-|PF_2|=|QF_1|-|QF_2|=2a$，

所以$\left|PF_1\right|+\left|QF_1\right|=4a+\left|PF_2\right|+\left|QF_2\right|=4a+\left|PQ\right|$，

故$\triangle PF_1Q$的周长为$|PF_1|+|QF_1|+|PQ|=4a+2|PQ|=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$，

故 C 项正确；

由双曲线的渐近线方程为$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$，

可得点P到两条渐近线的距离之积为

$\dfrac{|\sqrt{2}m+\sqrt{3}n|}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|\sqrt{2}m-\sqrt{3}n|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2m^2-3n^2|}{5}=\dfrac{6}{5}$，D 正确.

故选：BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 过直线$4x+2y+5=0$与$3x-2y+9=0$的交点，且垂直于直线$x+2y+1=0$的直线方程是______.

【答案】$2x-y+\dfrac{11}{2}=0$

【解析】

【分析】首先求出两直线的交点坐标，设所求直线方程为$2x-y+n=0$，代入交点坐标求出n的值，即可得解.

【详解】由$\begin{cases}4x+2y+5=0\\3x-2y+9=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-2\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，

所以直线$4x+2y+5=0$与$3x-2y+9=0$的交点为$\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$，

设所求直线方程为$2x-y+n=0$，则$2\times(-2)-\dfrac{3}{2}+n=0$，解得$n=\dfrac{11}{2}$，

所以所求直线方程为$2x-y+\dfrac{11}{2}=0$.

故答案为：$2x-y+\dfrac{11}{2}=0$

13. 若过双曲线焦点且与双曲线实轴线垂直的弦的长等于焦点到渐近线距离的2倍，则此双曲线的离心率为__________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\quad b>0)$，利用点到直线的距离公式求出焦点到渐近线的距离,结合题意建立关于 a、b 的等式，解出 a=2b,进而可得该双曲线的离心率.

【详解】设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\quad b>0)$，

不妨设$F(c,0)$，一条渐近线为$ay-bx=0$

可得焦点到渐近线的距离为$d=\dfrac{|0-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，

过双曲线焦点且与实轴垂直的弦的长等于$\dfrac{2b^2}{a}$，

$\because$ 过双曲线焦点且与双曲线实轴线垂直的弦的长等于焦点到渐近线距离的2倍，

$\therefore \dfrac{2b^2}{a}=2b$

解得$a=b$

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$

【点睛】本题给出双曲线满足的条件，求双曲线的离心率.着重考查了双曲线的标准方程与简单几何性质等知识，属于基础题.

14. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的右焦点为 F，点 P 在椭圆上且在 x 轴上方．若线段 PF 的中点 M 在以原点 O 为圆心，$|OF|$为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是______________.

【答案】$-2\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】设椭圆得左焦点为 F'，连接 OM,PF'，根据线段 PF 的中点 M 在以原点 O 为圆心，$|OF|$为半径的圆上，可得$|OM|=|OF|=c$，从而可求得$|PF'|,|PF|$，在$\triangle PFF'$，利用余弦定理求得$\angle PFF'$的余弦值，从而可得出答案.

【详解】解：设椭圆得左焦点为 F'，连接 OM,PF'，

由椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$得，$a=5,b=4,c=3$，

则 $F'(-3,0),F(3,0)$，$|FF'|=2c=6$，$|PF|+|PF'|=2a=10$，

因为点 M 在以原点 O 为圆心，$|OF|$为半径的圆上，

所以$|OM|=|OF|=c=3$，

因为O,M 分别为FF',PF 得中点，

所以$|PF'|=2|OF|=6$，所以$|PF|=10-|PF'|=4$，

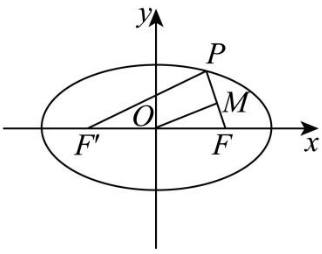
所以$\cos\angle PFF'=\dfrac{16+36-36}{2\times4\times6}=\dfrac{1}{3}$，则$\sin\angle PFF'=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\tan\angle PFF'=2\sqrt{2}$，

因为点 P 在椭圆上且在 x 轴上方，则直线 PF 的倾斜角与$\angle PFF'$互补，

所以直线 PF 的斜率$-2\sqrt{2}$.

故答案为：$-2\sqrt{2}$.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步聚.

15. 已知直线$m:(a-1)x+(2a+3)y-a+6=0$，$n:x-2y+3=0$.

（1）若坐标原点 O 到直线 m 的距离为$\sqrt{5}$，求 a 的值；

（2）当$a=0$时，直线 l 过 m 与 n 的交点，且它在两坐标轴上的截距相反，求直线 l 的方程.

【答案】（1） $a=-\dfrac{1}{4}$或$a=-\dfrac{7}{3}$

（2） $3x-7y=0$或$x-y+12=0$

【解析】

【分析】（1）依据点到直线的距离公式建立方程求解即可.

（2）联立求出直线交点，再分类讨论直线是否过原点，求解即可.

【小问 1 详解】

设原点 O 到直线 m 的距离为d，

则$d=\dfrac{|-a+6|}{\sqrt{(a-1)^2+(2a+3)^2}}=\sqrt{5}$，解得$a=-\dfrac{1}{4}$或$a=-\dfrac{7}{3}$；

【小问 2 详解】

由$\begin{cases}-x+3y+6=0\\x-2y+3=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-21\\y=-9\end{cases}$，即 m 与 n 的交点为$(-21,-9)$.

当直线 l 过原点时，此时直线斜率为$\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$，

所以直线 l 的方程为$3x-7y=0$；

当直线 l 不过原点时，设 l 的方程为$\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{-b}=1$，

将$(-21,-9)$代入得$b=-12$，

所以直线 l 的方程为$x-y+12=0$.

故满足条件的直线 l 的方程为$3x-7y=0$或$x-y+12=0$.

16. 双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的离心率为 2，经过 C 的焦点垂直于 x 轴的直线被 C 所截得的弦长为 12.

（1）求 C 的方程；

（2）设 A，B 是 C 上两点，线段 AB 的中点为$M\left(5,3\right)$，求直线 AB 的方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

（2）$y=5x-22$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件求得a,b，由此求得C的方程.

（2）结合点差法求得直线AB的斜率，从而求得直线AB的方程.

【小问 1 详解】

因为 C 的离心率为 2，所以$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，

可得$\frac{b^2}{a^2}=3$.将$x=\sqrt{a^2+b^2}$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

可得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，由题设$\frac{b^2}{a}=6$.解得$a=2$，

$b^2=12$，$b=2\sqrt{3}$，

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

【小问 2 详解】

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{12}=1$，$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{12}=1$.

因此$\frac{x_1^2-x_2^2}{4}-\frac{y_1^2-y_2^2}{12}=0$，即$\frac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{4}-\frac{\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)}{12}=0$.

因为线段 AB 的中点为$M\left(5,3\right)$，所以$x_1+x_2=10$，

$y_1+y_2=6$，从而 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=5$，于是直线 AB 的方程是 $y=5x-22$.

17. 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-2+a)^2=1$，点 $A(3,0)$，O 为坐标原点.

（1）若 $a=1$，求圆 C 过 A 点的切线方程；

（2）若直线 $l:x-y+1=0$ 与圆 C 交于 M，N 两点，且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{3}{2}$，求 a 的值；

（3）若圆 C 上存在点 P，满足 $|OP|=2|AP|$，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$y=0$ 或 $4x+3y-12=0$；

（2）$a=\dfrac{1}{2}$；

（3）$3-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le a\le 3+\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）把 $a=1$ 代入，设出切线方程，利用点到直线距离公式计算即得.

（2）联立直线 l 与圆 C 的方程，结合韦达定理及给定的数量积计算即得.

（3）求出点 P 的轨迹方程，利用两圆有公共点列出不等式求解即得.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心 $C(1,1)$，半径 $r=1$，

而点 $C(1,1)$ 到直线 $x=3$ 的距离为 2，因此圆 C 过 A 点的切线斜率存在，设方程为 $y=k(x-3)$，

则 $\dfrac{|-2k-1|}{\sqrt{1^2+k^2}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=-\dfrac{4}{3}$，

所以所求切线方程为 $y=0$ 或 $4x+3y-12=0$.

【小问 2 详解】

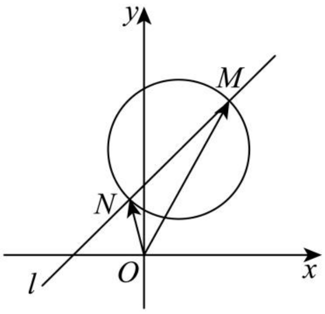
由 $\begin{cases}x-y+1=0\\(x-a)^2+(y-2+a)^2=1\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-x+a^2-a=0$，$\Delta=1-4a^2+4a>0$，

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=1,x_1x_2=a^2-a$，

由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{3}{2}$，得 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{3}{2}$，则 $x_1x_2+(x_1+1)(x_2+1)=\dfrac{3}{2}$，

整理得 $2x_1x_2+x_1+x_2+1-\dfrac{3}{2}=0$，则 $2(a^2-a)+\dfrac{1}{2}=0$，即 $(a-\dfrac{1}{2})^2=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，满足 $\Delta>0$，

所以$a=\frac{1}{2}$.



【小问 3 详解】

设点$P(x,y)$，由$|OP|=2|AP|$，得$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，

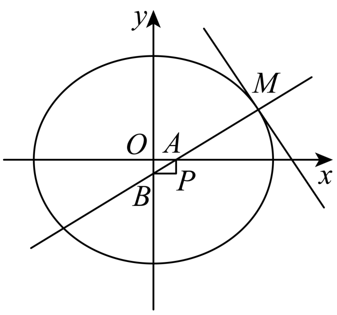
整理得$x^2+y^2-8x+12=0$，即$(x-4)^2+y^2=4$，因此点P的轨迹是以点$D(4,0)$为圆心，2 为半径的圆，

依题意，圆C与圆D有公共点，即$1\le|CD|\le3$，则$1\le\sqrt{(4-a)^2+(-2+a)^2}\le3$，

整理得$\frac{1}{2}\le(a-3)^2+1\le\frac{9}{2}$，解得$3-\frac{\sqrt{14}}{2}\le a\le3+\frac{\sqrt{14}}{2}$，

所以a的取值范围是$3-\frac{\sqrt{14}}{2}\le a\le3+\frac{\sqrt{14}}{2}$.

18. 已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，短轴的其中一个端点为$B_1$，长轴端点为$A_1,A_2$，且$\triangle B_1F_1F_2$是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形.



（1）求椭圆C_1的方程及离心率；

（2）如图，直线$l:y=kx+m$与椭圆C_1有唯一的公共点M，过点M且与l垂直的直线分别交x轴，y轴于$A(x,0),B(0,y)$两点．当点M运动时，求点$P(x,y)$的轨迹方程.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；$e=\frac{1}{2}$.

（2）$4x^2+3y^2=1$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件，求出a,b,c，可得椭圆标准方程.

（2）联立椭圆方程与直线方程，根据相切$\Delta=0$可得k,m的关系，再根据垂直得到直线AB的方程，用k,m表示x,y，最后消元，可得P点轨迹方程.

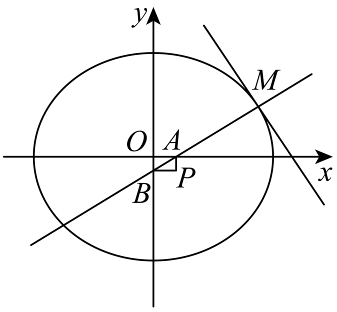
【小问 1 详解】

由题意：$\begin{cases}a=2c\\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$.

所以椭圆C_1的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

如图：



由$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去$y$，得：$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4\left(m^2-3\right)=0$.

因为直线与椭圆相切，所以$\Delta=0\Rightarrow 64k^2m^2-4\left(4k^2+3\right)\times4\left(m^2-3\right)=0$，即$m^2=4k^2+3$.

设$M\left(x_0,y_0\right)$，则$x_0=-\dfrac{8km}{2\left(4k^2+3\right)}=-\dfrac{4km}{m^2}=-\dfrac{4k}{m}$；

$y_0=kx_0+m=\dfrac{-4k^2+m^2}{m}=\dfrac{3}{m}$.

又直线AB与l垂直，所以l_{AB}：$y-\dfrac{3}{m}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{4k}{m}\right)$.

令$x=0$，得：$y=-\dfrac{4}{m}+\dfrac{3}{m}=-\dfrac{1}{m}$，即$B\left(0,-\dfrac{1}{m}\right)$；

令 $y=0$，得：$x=\frac{3k}{m}-\frac{4k}{m}=-\frac{k}{m}$，即 $A\left(-\frac{k}{m},0\right)$.

所以对$P(x,y)$，有$\begin{cases}x=-\frac{k}{m}\\ y=-\frac{1}{m}\end{cases}$，

因为$m^2=3+4k^2$，所以：$4x^2+3y^2=\frac{4k^2+3}{m^2}=\frac{m^2}{m^2}=1$.

所以$P(x,y)$点的轨迹方程为：$4x^2+3y^2=1$.

【点睛】方法点睛：本题的第二问，联立椭圆方程与直线方程，根据相切$\Delta=0$可得$m^2=3+4k^2$的，再根据垂直得到直线AB的方程，用k,m表示x,y，得$\begin{cases}x=-\frac{k}{m}\\ y=-\frac{1}{m}\end{cases}$，最后消元，可得$P$点轨迹方程.

19. 平面直角坐标系中，圆M经过点$A\left(\sqrt{3},1\right)$，$B\left(0,4\right)$，$C\left(-2,2\right)$.

（1）求圆M的标准方程；

（2）设$D(0,1)$，过点D作直线l_1，交圆M于PQ两点，PQ不在y轴上.

①过点D作与直线l_1垂直的直线l_2，交圆M于EF两点，记四边形$EPFQ$的面积为S，求S的最大值；

②设直线OP，BQ相交于点N，试证明点N在定直线上，求出该直线方程.

【答案】（1）$x^2+\left(y-2\right)^2=4$

（2）①S的最大值为7；②证明见解析，点N在定直线$y=-2$上.

【解析】

【分析】（1）设圆M的方程为$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$，利用待定系数法求出$a,b,r^2$，即可得解；

（2）①设直线l_1的方程为$y=kx+1$，分$k=0$和$k\neq0$两种情况讨论，利用圆的弦长公式分别求出$|PQ|,|EF|$，再根据$S=\frac{1}{2}|EF|\cdot|PQ|$即可得出答案；

②设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，联立$\begin{cases}x^2+\left(y-2\right)^2=4\\ y=kx+1\end{cases}$，利用韦达定理求得$x_1+x_2,x_1x_2$，求出直线$OP$，$BQ$的方程，联立求出交点坐标即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：设圆 M 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

则 $\begin{cases}(\sqrt{3}-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(4-b)^2=r^2\\(-2-a)^2+(2-b)^2=r^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0\\b=2\\r^2=4\end{cases}$，

所以圆 M 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=4$；

【小问 2 详解】

设直线 l_1 的方程为 $y=kx+1$，即 $kx-y+1=0$，

则圆心(0,2)到直线 l_1 的距离 $d_1=\dfrac{|-2+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $|PQ|=2\sqrt{4-\dfrac{1}{k^2+1}}=2\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

①若 $k=0$，则直线 l_2 斜率不存在，

则 $|PQ|=2\sqrt{3}$，$|EF|=4$，则 $S=\dfrac{1}{2}|EF|\cdot|PQ|=4\sqrt{3}$，

若 $k\neq 0$，则直线 l_2 得方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+1$，即 $x+ky-k=0$，

则圆心(0,2)到直线 l_1 的距离 $d_2=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$，

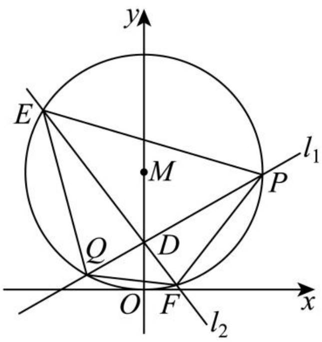
所以 $|EF|=2\sqrt{4-\dfrac{k^2}{k^2+1}}=2\sqrt{\dfrac{3k^2+4}{k^2+1}}$，

则 $S=\dfrac{1}{2}|EF|\cdot|PQ|=2\sqrt{\dfrac{(4k^2+3)(3k^2+4)}{(k^2+1)^2}}=2\sqrt{\dfrac{12(k^2+1)^2+k^2}{(k^2+1)^2}}$

$=2\sqrt{12+\dfrac{k^2}{(k^2+1)^2}}=2\sqrt{12+\dfrac{1}{k^2+\dfrac{1}{k^2}+2}}\leq 2\sqrt{12+\dfrac{1}{2\sqrt{k^2\cdot\dfrac{1}{k^2}}+2}}=7$，

当且仅当 $k^2=\dfrac{1}{k^2}$，即 $k=\pm 1$ 时，取等号，

综上所述，因为 $7=\sqrt{49}>4\sqrt{3}$，所以 S 的最大值为 7；



②设$P\left(x_1, y_1\right), Q\left(x_2, y_2\right)$，

联立$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=4 \\ y=kx+1 \end{cases}$，消$y$得$\left(k^2+1\right)x^2-2kx-3=0$，

则$x_1+x_2=\dfrac{2k}{k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{-3}{k^2+1}$，

直线OP的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，

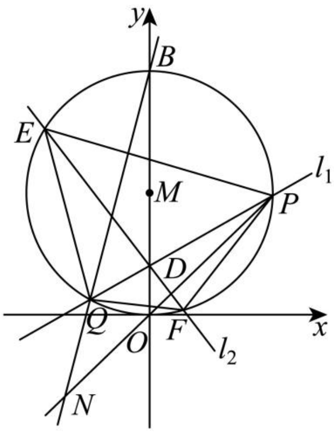
直线BQ的方程为$y=\dfrac{y_2-4}{x_2}x+4$，

联立$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1}x \\ y=\dfrac{y_2-4}{x_2}x+4 \end{cases}$，解得$x=\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}$，

则$y=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2}=\dfrac{4y_1x_2}{3x_1+x_2}=\dfrac{4\left(kx_1+1\right)x_2}{3x_1+x_2}=\dfrac{4kx_1x_2+4x_2}{3x_1+x_2}=\dfrac{-6x_1-2x_2}{3x_1+x_2}=-2$，

所以$N\left(\dfrac{4x_1x_2}{3x_1+x_2},-2\right)$，

所以点N在定直线$y=-2$上.



【点睛】方法点睛：求解直线过定点问题常用方法如下：

（1）“特殊探路，一般证明”：即先通过特殊情况确定定点，再转化为有方向、有目的的一般性证明；

（2）“一般推理，特殊求解”：即设出定点坐标，根据题设条件选择参数，建立一个直线系或曲线的方程，再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组，以这个方程组的解为坐标的点即为所求点；

（3）求证直线过定点$\left(x_0, y_0\right)$，常利用直线的点斜式方程$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$或截距式$y=kx+b$来证明.