

绝密★启用前

江苏、福建、广东、河北、辽宁、湖北、湖南、重庆等八省市

2021 届高三新高考统一适应性考试

江苏省天一中学考前热身模拟试题数学试题（二）

考试时间：120 分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、单选题(共 40 分)

1. (本题 5 分)已知全集 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ ， $B = \{x | x \geq 1\}$ ，则 $A \cup (\complement_U B) =$ ()

A. $\{x | x > 0\}$ B. $\{x | x < 1\}$ C. $\{x | x < 2\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$

2. (本题 5 分)设 $a = 3^{-5}$ ， $b = \log_3 0.2$ ， $c = \log_2 3$ ，则 ()

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

3. (本题 5 分)已知 $\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ， $\cos(a - \beta) = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，且 $0 < a < \frac{3\pi}{4}$ ， $0 < \beta < \frac{3\pi}{4}$ ，

则 $\sin \beta =$ ()

A. $\frac{9\sqrt{15}}{35}$ B. $\frac{11\sqrt{10}}{35}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{35}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{35}$

4. (本题 5 分)已知直线 l 与曲线 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = \ln x$ 分别相切于点 $A(x_1, y_1)$ ，

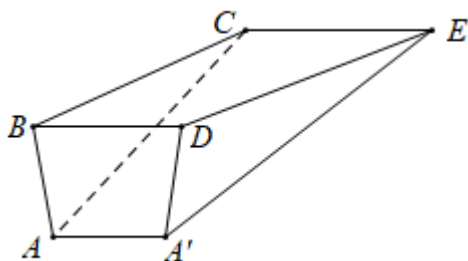
$B(x_2, y_2)$.有以下命题: (1) $\angle AOB > 90^\circ$ (O 为原点); (2) $x_1 \in (-1, 1)$; (3) 当 $x_1 < 0$ 时, $x_2 - x_1 > 2(\sqrt{2} + 1)$.则真命题的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. (本题 5 分)琵琶、二胡、编钟、箫笛、瑟、琴、埙、笙和鼓这十种民族乐器被称为“中国古代十大乐器”.为弘扬中国传统文化,某校以这十种乐器为题材,在周末学生兴趣活动中开展了“中国古代乐器”知识讲座,共连续安排八节课,一节课只讲一种乐器,一种乐器最多安排一节课,则琵琶、二胡、编钟一定安排,且这三种乐器互不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{1}{360}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{1}{15}$

6. (本题 5 分)《九章算术》与《几何原本》并称现代数学的两大源泉.在《九章算术》卷五商功篇中介绍了羡除(此处是指三面为等腰梯形,其他两侧面为直角三角形的五面体)体积的求法.在如图所示的羡除中,平面 $ABDA'$ 是铅垂面,下宽 $AA' = 3\text{m}$,上宽 $BD = 4\text{m}$,深 3m ,平面 $BDEC$ 是水平面,末端宽 $CE = 5\text{m}$,无深,长 6m (直线 CE 到 BD 的距离),则该羡除的体积为 ()



- A. 24m^3 B. 30m^3 C. 36m^3 D. 42m^3

7. (本题 5 分)已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 是椭圆上一点 (异于左、右顶点),若存在以 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ 为半径的圆内切于 $\triangle PF_1F_2$, 则椭圆的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right)$

8. (本题 5 分)2019 年末, 武汉出现新型冠状病毒肺炎 (COVID-19) 疫情, 并快速席卷我国其他地区, 传播速度很快. 因这种病毒是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株, 所以目前没有特异治疗方法, 防控难度很大. 武汉市出现疫情最早, 感染人员最多, 防控压力最大, 武汉市从 2 月 7 日起举全市之力入户上门排查确诊的新冠肺炎患者、疑似的新冠肺炎患者、无法明确排除新冠肺炎的发热患者和与确诊患者的密切接触者等“四类”人员, 强化网格化管理, 不落一户、不漏一人. 在排查期间, 一户 6 口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”, 这种情况下医护人员要对其家庭成员随机地逐一进行“核糖核酸”检测, 若出现阳性, 则该家庭为“感染高危户”. 设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 p ($0 < p < 1$) 且相互独立, 该家庭至少检测了 5 个人才能确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$, 当 $p = p_0$ 时, $f(p)$ 最大, 则 $p_0 = (\quad)$

- A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

二、多选题(共 20 分)

9. (本题 5 分)甲罐中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球; 乙罐中有 5 个红球, 3 个白球和 2 个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1 , A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 M 表示由乙罐取出的球是红球的事件, 下列的结论: 其中正确结论的为 ()

- A. $P(M) = \frac{1}{2}$ B. $P(M|A_1) = \frac{6}{11}$
 C. 事件 M 与事件 A_1 不相互独立 D. A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件

10. (本题 5 分)定义空间两个向量的一种运算 $\vec{a} \otimes \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 则关于空间向量上述运算的以下结论中恒成立的有 ()

- A. $\lambda (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \otimes \vec{b}$
 B. $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{b} \otimes \vec{a}$
 C. $(\vec{a} + \vec{b}) \otimes \vec{c} = (\vec{a} \otimes \vec{c}) + (\vec{b} \otimes \vec{c})$

D. 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \otimes \vec{b} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$

11. (本题 5 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和 $S_n > 0$, 设 $b_n = a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则下列判断正确的是 ()

A. 若 $q = 1$, 则 $T_n = S_n$

B. 若 $q > 2$, 则 $T_n > S_n$

C. 若 $q = -\frac{1}{4}$, 则 $T_n > S_n$

D. 若 $q = -\frac{3}{4}$, 则 $T_n > S_n$

12. (本题 5 分) 关于函数 $f(x) = ae^x - \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$ 下列说法正确的是 ()

A. 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x$

B. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上恰有一个极值, 则 $a = 0$

C. 对任意 $a > 0$, $f(x) \geq 0$ 恒成立

D. 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上恰有 2 个零点

三、填空题(共 20 分)

13. (本题 5 分) 若 $(2+x)^{17} = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_{17}(1+x)^{17}$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{16} =$ _____.

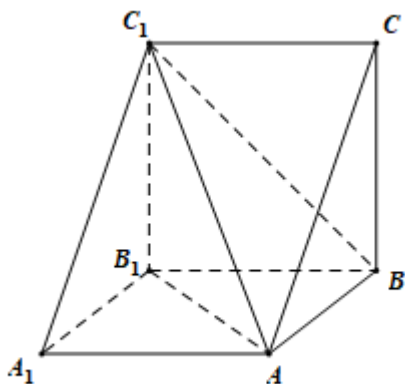
14. (本题 5 分) 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BA}$, 则 $\cos B$ 的取值范围是 _____.

15. (本题 5 分) 《九章算术》中记载: 将底面为直角三角形的直三棱柱称为堑堵, 将一堑堵沿其一顶点与相对的棱剖开, 得到一个阳马(底面是长方形, 且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥) 和一个鳖臑(四个面均为直角三角形的四面体). 在如图所示的堑堵

$ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 = BC = 2\sqrt{3}$, $AB = 2$, $AC = 4$, 且有鳖臑 $C_1 - ABB_1$ 和鳖臑

$C_1 - ABC$, 现将鳖臑 $C_1 - ABC$ 沿线 BC_1 翻折, 使点 C 与点 B_1 重合, 则鳖臑 $C_1 - ABC$

经翻折后，与鳖臑 $C_1 - ABB_1$ 拼接成的几何体的外接球的表面积是_____.



16. (本题 5 分) 对于正整数 n , 设 x_n 是关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2} - \log_{n+1} x^n = n^2 + 3n$ 的实数根.

记 $a_n = \left[\frac{1}{2x_n} \right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $a_1 =$ _____; 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 则 $\sqrt{S_{2020}} =$ _____.

四、解答题(共 70 分)

17. (本题 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足:

$$a_n = \log_2 b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n(n+2)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2}{b_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_{2n} .

18. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos^2 x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $f(A)=2, a=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. (本题 12 分)第 13 届女排世界杯于 2019 年 9 月 14 日在日本举行, 共有 12 支参赛队伍. 本次比赛启用了新的排球用球 *MIKSA-V200W*, 已知这种球的质量指标 ζ (单位: g) 服从正态分布 $N(270, 5^2)$. 比赛赛制采取单循环方式, 即每支球队进行 11 场比赛(采取 5 局 3 胜制), 最后靠积分选出最后冠军积分规则如下: 比赛中以 3:0 或 3:1 取胜的球队积 3 分, 负队积 0 分; 而在比赛中以 3:2 取胜的球队积 2 分, 负队积 1 分. 已知第 10 轮中国队对抗塞尔维亚队, 设每局比赛中国队取胜的概率为 $p(0 < p < 1)$.

(1) 如果比赛准备了 1000 个排球, 估计质量指标在 $(260, 265]$ 内的排球个数(计算结果取整数).

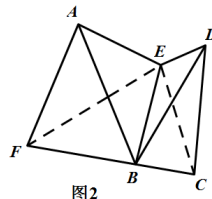
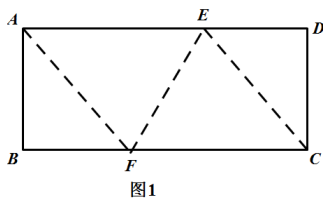
(2) 第 10 轮比赛中, 记中国队 3:1 取胜的概率为 $f(p)$.

(i) 求出 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ;

(ii) 若以 p_0 作为 p 的值记第 10 轮比赛中, 中国队所得积分为 X , 求 X 的分布列.

参考数据: $\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6826$, $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9644$.

20. (本题 12 分)如图 1, 矩形 $ABCD$ 中, $2AB=BC$, 将矩形 $ABCD$ 折起, 使点 A 与点 C 重合, 折痕为 EF . 连接 AF, CE , 以 AF 和 EF 为折痕, 将四边形 $ABFE$ 折起, 使点 B 落在线段 FC 上, 将 $\triangle CDE$ 向上折起, 使平面 $DEC \perp$ 平面 FEC , 如图 2.



(1) 证明: 平面 $ABE \perp$ 平面 EFC ;

(2) 连接 BE, BD , 求锐二面角 $A-BE-D$ 的正弦值.

21. (本题 12 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ ($p > 0$)

共焦点，以椭圆的上下顶点 M 、 N 和左右焦点 F_1 、 F_2 所围成的四边形 MF_1NF_2 的面积为 8，经过 F_2 的直线交抛物线于 A 、 B ，交椭圆于 C 、 D ，且满足

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{|AF_2|} + \frac{1}{|BF_2|}\right) = \frac{1}{|CF_2|} + \frac{1}{|DF_2|}.$$

(1) 求出椭圆和抛物线的标准方程；

(2) 若点 D 在第三象限，且点 A 在点 B 上方，点 C 在点 D 上方，当 $\triangle BF_1D$ 面积取得最大值 S 时，求 $\overrightarrow{F_2F_1} \cdot \overrightarrow{F_2B}$ 的值.

22. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x$ ($x \in \mathbf{R}$)，其中 e 为自然对数的底数.

(1) 当 $x > 1$ 时，证明： $f(x-1) - (1-x)\ln x > 2x^2 - 3x + 1$ ；

(2) 设实数 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 是函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}a(x+1)^2$ 的两个零点，求实数 a 的取值范围.

绝密★启用前

江苏、福建、广东、河北、辽宁、湖北、湖南、重庆等八省市 2021

届高三新高考统一适应性考试

江苏省天一中学考前热身模拟试题数学试题（二）

参考答案

1. C

2. D

3. A

4. C

5. B

6. C

7. A

8. A

9. BCD

10. BD

11. BD

12. ABD

13. $2^{17} - 1$

14. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right)$

15. $\frac{100\pi}{3}$

16. 0 1010

17. (1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$; (2) $T_{2n} = \frac{7}{6} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{2}{3 \times 4^n}$

18. (1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z})$; (2) $\sqrt{3}$.

19. (1) 140; (2) (i) $p_0 = \frac{3}{4}$; (ii) 分布列见解析.

20. (1) 详见解析; (2) $\sqrt{\frac{3}{17}}$

21. (1) $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\Gamma: y^2 = 8x$; (2) $\frac{16(1 - 5\sqrt{2} + \sqrt{11 + 10\sqrt{2}})}{\sqrt{11 + 10\sqrt{2}} - 3 - 3\sqrt{2}}$

22. (1) 证明见解析; (2) $(-\infty, 0)$.